

مختصات قطبی

- معادله قطبی منحنی‌های زیر را بنویسید:

$$۱) x^2 = 3(y^2 + 1)$$

$$۲) x^2 - y^2 - 2x = 0$$

$$۳) (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

$$۴) xy = 1$$

$$۵) y = 3 - x$$

$$۶) x^3 + y^3 - 3ay = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$$

- معادله دکارتی منحنی‌های زیر را بنویسید:

$$۷) r^2 \sin 2\theta = 1$$

$$۸) r^2 - \sin \theta = 0$$

$$۹) r^2 = 3 \sin 2\theta$$

$$۱۰) r \sin \theta + 1 = 0$$

$$۱۱) r = \frac{3}{1 - 2 \cos \theta}$$

$$۱۲) \theta = \frac{\pi}{4}$$

- نمودار معادلات قطبی زیر را رسم کنید:

$$۱۳) r = 5$$

$$۱۴) r = 2 - \cos \theta$$

$$۱۵) r = -2 \cos \theta$$

$$۱۶) r = -6(1 + \cos \theta)$$

$$۱۷) r = -2 \sin \theta$$

$$۱۸) r = 4(1 - \sin \theta)$$

$$۱۹) r = 1 + 2 \cos \theta$$

$$۲۰) r = 2 + 4 \sin \theta$$

$$۲۱) r^2 = -16 \sin 2\theta$$

$$۲۲) r^2 = 9 \sin 2\theta$$

$$۲۳) r = 2 \sin 4\theta$$

$$۲۴) r = 8 \cos 3\theta$$

$$۲۵) r = -3 \sin 5\theta$$

$$۲۶) r = 4 \cos 2\theta$$

$$۲۷) r = 3 + 6 \cos 3\theta$$

$$۲۸) r = \sqrt{3} + 2 \sin 2\theta$$

$$۲۹) r^2 = 1 + 2 \sin 3\theta$$

$$۳۰) r^2 = 9 \cos 2\theta$$

$$۳۱) r = 2 \cos^2 \theta$$

$$۳۲) r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

$$۳۳) r = \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

$$۳۴) r^2 = 1 + \cos \theta$$

$$۳۵) r^2 = 1 + \sin 2\theta$$

$$۳۶) r^2 = \sin 3\theta$$

$$۳۷) r = 2 \cos \theta - 1$$

$$۳۸) r = e^\theta$$

$$۳۹) r = 1 - \cos 2\theta$$

$$۴۰) r = \sqrt{1 + \sin \theta}$$

$$۴۱) r^2 = \cos 2\theta$$

$$۴۲) r = \sin \theta + \cos \theta$$

$$۴۳) r = \tan \theta$$

$$۴۴) r = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$۴۵) r = \sin \theta - \cos \theta$$

- مساحت محدود به منحنی‌های زیر را به دست آورید:

$$۴۶) r = 3 - 3 \cos \theta$$

$$۴۷) r = 2 + 2 \sin \theta$$

$$۴۸) r = \sin 2\theta$$

$$۴۹) r^2 = 9 \cos 2\theta$$

$$۵۰) r = 3 \sin \theta, r = \sqrt{3} \cos \theta$$

$$۵۱) r = 1 + \sin \theta, r = 3 \sin \theta$$

$$۵۲) r = 6 \cos \theta, r = 6 \sin \theta$$

$$۵۳) r^2 = 2 \cos 2\theta, r = 1$$

$$۵۴) r^2 = 8 \cos 2\theta$$

$$۵۵) r = 2(1 + \cos \theta)$$

$$۵۶) r = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$۵۷) r = 4 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$۵۸) r = \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$۵۹) r = \cos^2 \theta$$

۶۰) مساحت خارج دلنمای $r = 2 + 2 \sin \theta$ و داخل دایره $r = 3$ ؟

۶۱) مساحت خارج دایره $r = 2$ و داخل پروانه $r^2 = 8 \sin 2\theta$ ؟

۶۲) مساحت خارج دلنمای $r = 1 - \cos \theta$ و داخل دایره $r = 3 \cos \theta$ ؟

۶۳) مساحت ناحیه محصور به خارج از منحنی $\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2} = 1$ و داخل منحنی $r = 1 + \sin \theta$ ؟

۶۴) مساحت محدود به منحنی‌های $r = 1 - \cos \theta$ و $r = 4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta$ را به دست آورید.

۶۵) مساحت محدود به منحنی‌های $r = \cos 2\theta$ و $r = \sin 2\theta$ را به دست آورید.

۶۶) مساحت درون حلزونی $r = 4 + 2 \cos \theta$ را به دست آورید.

۶۷) مساحت درون دایره $r = -2 \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ را به دست آورید.

۶۸) مساحت ناحیه مشترک بین دلواریهای $r = 1 + \cos \theta$ و $r = 1 - \cos \theta$ را به دست آورید.

۶۹) مساحت درون یک پر از گل $r = \cos 2\theta$ را به دست آورید.

۷۰) مساحت درون یک طوق از پروانه $r^2 = 4 \sin 2\theta$ را به دست آورید.

۷۱) مساحت درون گل شش پر $r^2 = 4 \sin 3\theta$ را به دست آورید.

۷۲) مساحت درون دایره $r = 6$ و بالای خط $r \sin \theta = 3$ را به دست آورید.

۷۳) مساحت ناحیهی خارج از منحنی $x^2 - 3x + y^2 = 0$ و داخل منحنی $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}$ را به دست آورید.

۷۴) مطلوب است مساحت ناحیهی بین پیچهای اول و دوم $r = 3\theta$ را به دست آورید.

۷۵) مساحت ناحیهی بین اولین پیچ $r = 2\theta$ و محور قطبی را به دست آورید.

۷۶) مساحت ناحیه داخل منحنی اول و خارج منحنی دوم را به دست آورید:

$$A : \begin{cases} r = 2 \cos 3\theta \\ r = 1 \end{cases} \qquad B : \begin{cases} r = 2 + \cos 2\theta \\ r = 2 + \sin \theta \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} r^2 = 4 \sin 2\theta \\ r = \sqrt{2} \end{cases} \qquad D : \begin{cases} r = 2 \sin \theta \\ r = 1 \end{cases}$$

- طول قوس منحنیهای زیر را به دست آورید:

$$۷۷) r = e^{-\theta} \qquad \theta = 0 \text{ تا } \theta = 2\pi$$

$$۷۸) r = \theta \qquad \theta = 0 \text{ تا } \theta = 4\pi$$

$$۷۹) r = 2^\theta \qquad \theta = 0 \text{ تا } \theta = \pi$$

$$۸۰) r = 2 - 2 \cos \theta$$

$$۸۱) r = \sin^2 \frac{1}{4} \theta$$

توابع برداری

- ۱- فرض کنید ذره‌ای بر کره‌ای به مرکز مبدأ چنان حرکت می‌کند که بردار مکانش مشتق‌پذیر باشد. اگر $R(t)$ نشان دهنده‌ی بردار مکان ذره باشد نشان دهید $R(t)$ بر $\frac{dR}{dt}$ عمود است.
- ۲- نمایش طبیعی تابع برداری زیر را به دست آورید:

$$R(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

- ۳- نشان دهید طول n دور مارپیچ $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ از رابطه‌ی $2n\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ حاصل می‌شود.
- ۴- بردارهای یک‌ه مماس، قائم اصلی و قائم دوم (T, N, B) را برای منحنی‌های زیر در نقاط داده شده به دست آورید.

$$R(t) = (\cosh t, \sinh t, t) \quad t = 0 \bullet$$

$$R(t) = (e^t \cos t, e^t \sinh t, e^t) \quad t = \frac{\pi}{4} \bullet$$

- ۵- فرض کنید c یک مکعب پیچ خورده $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3$ باشد. انحنای ماکسیمم c را بیابید.

۶) نقاطی را بیابید که در آن انحنای بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ماکسیمم یا مینیمم شود.

۷) تاب منحنی $R(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ را به دست آورید.

۸) نشان دهید $R(t) = (t^2, 1 - 3t, 4t - 2)$ در یک صفحه قرار دارد.

۹) اگر c فصل مشترک رویه‌های $x^2 + y^2 = 2$ و $z = 2$ باشد. انحنای c را به دست آورید.

۱۰) منحنی فصل مشترک دو رویه $z = 1 + y\sqrt{3}$ و $x^2 + 4y^2 = 4$ را در نظر بگیرید. طول قوس خم، کنج فرنه، انحنای و تاب خم را به دست آورید.

۱۱) اگر c فصل مشترک دو رویه $y - x = 1$ و $yz = (y - 1)^2$ باشد. آن‌گاه انحنای، تاب، بردار یک‌ه مماس، قائم و قائم دوم را برای c حساب کنید.

(۱۲) معادله‌ی دایره بوسان $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ در نقطه‌ی $(0, 1)$ را به دست آورید.

(۱۳) معادله‌ی دایره انحنا $y = x^2 - \sin x$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ را به دست آورید.

(۱۴) در چه نقاطی خطوط مماس بر خم C با معادلات پارامتری $x = t, y = t^x, z = t^x$ با صفحه‌ی $x + 2y + z - 1 = 0$ موازی هستند؟

(۱۵) انحنا و تاب منحنی $R(t) = (t + \cos t, t - \cos t, \sqrt{2} \sin t)$ را در $t = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.

(۱۶) معادله‌ی دایره بوسان بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ در نقطه‌ی $(0, 3)$ را به دست آورید.

(۱۷) نشان دهید منحنی $R(t) = (-t^x + 1, 2t^x - 2, t^x)$ مسطح است.

(۱۸) طول منحنی $R(t) = (e^t \cos t, e^t \sinh t, e^t)$ را در فاصله‌ی $(0, \frac{\pi}{4})$ به دست آورید.

(۱۹) معادله‌ی صفحه بوسان و قائم منحنی $R(t) = (t + \frac{1}{3}t^x, t - \frac{1}{3}t^x, t^x)$ را در نقطه‌ی $t = -1$ به دست آورید.

(۲۰) نشان دهید شعاع انحنا‌ی یک منحنی در مختصات قطبی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'r'' - rr''^2|}$$

(۲۱) خم C که محل تلاقی رویه‌ی $x^2 + y^2 = 5$ با صفحه $z = x$ است را در نظر بگیرید انحنا‌ی آن را در نقطه‌ی $p = (1, 2, 1)$ حساب کنید.

(۲۲) برای منحنی فضایی $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}t)\vec{i} + (\ln t)\vec{j} + (\frac{1}{4}t^x)\vec{k}$ انحنا و تاب را به ازای $t = 1$ به دست آورید.

(۲۳) معادله دایره‌ی بوسان بر منحنی $xy = 1$ در نقطه‌ی $(1, 1)$ را به دست آورید.

۲۴- برای منحنی فضایی $\vec{r}(t) = (\sin t)\vec{i} + (\sqrt{2} \cos t)\vec{j} + (\sin t)\vec{k}$

الف) طول منحنی را از $t = 0$ تا $t = \frac{\pi}{4}$ بیابید.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان در $t = \frac{\pi}{4}$ را به دست آورید.

(۲۵) اگر $r(t) = (a \cos \omega t)\vec{i} + (a \sin \omega t)\vec{j} + b\omega\vec{k}$ ($0 < b, a$) بردار مکان ذره‌ای در فضا باشد، نشان

دهید که این منحنی دارای انحنای ثابت $k = \frac{a}{a^2 + b^2}$ است.

(۲۶) منحنی C با معادلات پارامتری $x(t) = t - t^2$ و $y(t) = 2t + 4$ و $z(t) = t + t^2$ مفروض است.

نقطه‌ای از منحنی را تعیین کنید که بیشترین انحنای را داشته باشد.

(۲۷) منحنی $\vec{r}(\theta) = \left[\int_0^\theta \cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) dt \right] \vec{i} + \left[\int_0^\theta \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) dt \right] \vec{j}$ مفروض است مطلوب است انحنای

منحنی در هر نقطه.

(۲۸) مطلوب است معادله صفحه‌ی بوسان منحنی $r(t) = (\cos at)\vec{i} + (\sin at)\vec{j} + bt\vec{k}$ در $t = 0$.

(۲۹) نشان دهید اگر خم $r(t)$ در صفحه باشد آن گاه تاب آن صفر است.

(۳۰) انحنای خم $y = \ln x$ را در نقطه‌ی $(1, 0)$ به دست آورید.

(۳۱) مینیمم شعاع انحنای منحنی $y = e^x$ را به دست آورید.

(۳۲) برای منحنی $r(t) = \left[\int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{4}x^2\right) dx \right] \vec{i} + \left[\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{4}x^2\right) dx \right] \vec{j} + (\sqrt{3}t)\vec{k}$ مطلوب است

بردارهای \vec{T} و \vec{N} و \vec{B} در $t = 0$.

(۳۳) برای منحنی $y = e^x$ معادله‌ی دایره‌ی بوسان را در نقطه $(0, 1)$ به دست آورید.

(۳۴) برای خم C با معادله پارامتری $r(t) = (2t)\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}$ معادله دایره بوسان را در $t = 1$ به دست

آورید.

(۳۵) انحنای و تاب منحنی $\begin{cases} r = \theta \\ z = r^2 \end{cases}$ را در نقطه $\theta = 0$ به دست آورید.