تمرین های فصل سوم

۱) مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x,y) = \ln x + \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$

ب) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$

ج) $f(x,y,z) = x^{yz}$

۲) فرض کنید f تابعی سه متغیره باشد که $f(x-y+z, x+y+z, x-y-z) = ۳x-y+z$

الف) مطلوب است تعیین $f(x,y,z)$.

ب) اگر $g(x,y,z) = f(x^{۲}, y^{۲}, z^{۲})$، مطلوب است تعیین سطوح تراز g.

ج) با مفروضات قسمت (ب) ثابت کنید

$$(\frac{\partial g}{\partial x})^{۲} + (\frac{\partial g}{\partial y})^{۲} + (\frac{\partial g}{\partial z})^{۲} = ۴g(x,y,z)$$

۳) اگر $z = f(x,y)$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ نشان دهید

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^{۲} + \frac{۱}{r^{۲}}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^{۲} = (\frac{\partial z}{\partial x})^{۲} + (\frac{\partial z}{\partial y})^{۲}$$

۴) با محاسبه‌ی مستقیم مشتق‌های جزئی برای تابع $f(x,y,z) = e^{xyz}$ تحقیق کنید $f_{xy} = f_{yx}$ و $f_{xyz} = f_{zyx} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{yzx}$.

۵) برای $w = \frac{z}{y+x}$ مشتق جزئی مرتبه‌ی چهارم $\frac{\partial^{۴} w}{\partial^{۲} z \partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

۶) نشان دهید توابع $u(x,y) = e^{x}\cos y$ و $v(x,y) = e^{x}\sin y$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

الف) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 　　ب) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

ج) $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ 　　د) $v_{xx} + v_{yy} = ۰$

معادلات (الف) و (ب) که معادلات کوشی ــ ریمان نامیده می‌شوند در نظریه‌ی توابع مختلط از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. هر یک از معادلات (ج) و (د) یک معادله‌ی لاپلاس در فضای دو بعدی نامیده می‌شود.

۷) معادله‌ی $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰$، که در آن u یک تابع سه متغیره‌ی است یک معادله‌ی لاپلاس در فضای سه بعدی نامیده می‌شود. نشان دهید تابع u با ضابطه‌ی زیر در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند.

$$u(x,y,z)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}},(x,y,z)\neq(۰,۰,۰)$$

۸) تابع $f(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲} & x^۲+y^۲\neq ۰ \\ ۰ & x^۲+y^۲=۰ \end{cases}$ مفروض است.

(الف) نشان دهید f در $(۰,۰)$ پیوسته است و مشتقات جزیی $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در این نقطه به دست آورید.

(ب) نشان دهید f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

۹) نشان دهید اگر یک تابع دو متغیره‌ی f، همگن از درجه‌ی n باشد آنگاه مشتقات جزیی f_x و f_y، همگن از درجه‌ی $n-۱$ هستند.

۱۰) (الف) فرض کنید توابع f و g توابعی یک متغیره هستند که روی $\mathbb{R}$ حداقل دو بار مشتق‌پذیرند. اگر c یک عدد حقیقی غیر صفر باشد، نشان دهید تابع u با ضابطه‌ی $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$ یک جواب برای معادله‌ی $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=\frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$ (موسوم به معادله موج) است.

(ب) تحقیق کنید که هر یک از توابع زیر جوابی برای معادله‌ی موج هستند.

(۱) $u(x,t)=x^۲+c^۲t^۲$

(۲) $u(x,t)=\sin x\sin ct$

(۳) $u(x,t)=e^x\cosh ct$

۱۱) برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=۲xy-۳xz+yz$، نمو تابع یعنی $\Delta f=f(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z)$ را در حالتی که $(a,b,c)=(۲,۱,۴)$، $\Delta x=۳$، $\Delta y=-۱$ و $\Delta z=۲$ محاسبه کنید.

۱۲) مشتق کل هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x,y,z)=x^۲y-xy^۳+x^۳y^۲$

(ب) $f(x,y,z)=\frac{x+y}{y+z}$

(ج) $f(x_۱,x_۲,...,x_n)=x_۱x_۲...x_n$

۱۳) با استفاده از مشتق کل، مقدار تقریبی $\sqrt{(۱/۰۳۶)^۲+(۱/۹۹)^۳}$ را به دست آورید.

۱۴) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲}$ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۱۵) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases} x & |x|\leq |y| \\ -x & |x|>|y| \end{cases}$$

در $(\circ,\circ)$ پیوسته است و مشتقات جزیی آن وجود دارند اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۶) تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin^{۲}(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(\circ,\circ) \\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ) \end{cases}$ مفروض است.

الف) با استفاده از تعریف نشان دهید f در مبدأ پیوسته است.

ب) نشان دهید f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۱۷) نشان دهید برای تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^{۲}+y^{۲}} & x^{۲}+y^{۲}\neq\circ \\ \circ & x^{۲}+y^{۲}=\circ \end{cases}$$

مشتقات جزیی وجود دارند اما f در مبدأ ناپیوسته است.

۱۸) تابع f را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(y-۱)}{\sqrt{x^{۲}+(y-۱)^{۲}}} & (x,y)\neq(\circ,۱) \\ \circ & (x,y)=(\circ,۱) \end{cases}$$

الف) نشان دهید f در $(\circ,۱)$ پیوسته است.

ب) مقادیر f_x و f_y را در $(\circ,۱)$ به دست آورید.

ج) آیا f در $(\circ,۱)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

۱۹) فرض کنید $f(x,y)=۳xy^{۲}-۵x-۲xy$ و $\Delta x=۲$ و $\Delta y=-۱$. نمو تابع f در $(-۱,۳)$ و مشتق کل تابع را در این نقطه محاسبه کنید.

۲۰) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی زیر همه جا مشتق‌پذیر است.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^{۴}+y^{۴}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(\circ,\circ) \\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ) \end{cases}$$

۲۱) اگر تابع دو متغیره‌ی f همگن از درجه‌ی n با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد، نشان دهید

$$x^{۲}f_{xx}(x,y)+۲xyf_{xy}(x,y)+y^{۲}f_{yy}(x,y)=n(n-۱)f(x,y)$$

۲۲) اگر توابع f و g حداقل دو بار مشتق‌پذیر باشند و تابع u به صورت

$$u(x,y)=\frac{۱}{x}[f(x+y)+g(x-y)]$$

تعریف شده باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{۲}\frac{\partial u}{\partial x})=x^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}$$

۲۳) اگر تابع z، به عنوان تابعی از x و y، به طور ضمنی توسط رابطه‌ی $\sin(x+y)+\sin(y+z)=۱$ تعریف شده باشد، عبارت $\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}$ را محاسبه کنید.

۲۴) فرض کنید $u=xyz$. نشان دهید اگر u و z توابعی از متغیرهای مستقل x و y در نظر گرفته شوند، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy(\frac{\partial z}{\partial x})+yz$$

و اگر x، y و z متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz$$

۲۵) فرض کنید تابع f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z=f(\frac{x+y}{y})$. ثابت کنید

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=۰$$

۲۶) فرض کنید g تابعی یک متغیره و مشتق‌پذیر باشد. تابع برداری $\mathbf{F}$ را به صورت

$$\mathbf{F}(x,y)=\frac{g'(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}})}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}x\mathbf{i}+\frac{g'(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}})}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}y\mathbf{j}$$

تعریف می‌کنیم. در ناحیه‌ای که شامل $(۰,۰)$ نباشد، تابع f را به قسمی بیابید که $\mathbf{F}(x,y)=\nabla f(x,y)$.

۲۷) اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z = \dfrac{y}{f(x^۲ + y^۲)}$، ثابت کنید

$$\frac{-۱}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^۲}$$

۲۸) فرض کنید $u(x,y) = e^y \cos x$، $x = ۲t$، $y = t^۲$ و $g(t) = u(x(t), y(t))$. تابع $g''(t)$ را با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای به دست آورید.

۲۹) فرض کنید $z = f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y باشد، $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ و $y = y(r,\theta) = r\sin\theta$. ثابت کنید $(\frac{\partial z}{\partial r})^۲ + \frac{۱}{r^۲}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲$. مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ بر حسب $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

۳۰) فرض کنید f تابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. با فرض این که $z = f(x,y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = \frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند نشان دهید $w = f(x+y, x-y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲} = ۱$ صدق می‌کند.

۳۱) با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $z = xy + f(x^۲ + y^۲)$ در معادله‌ی $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^۲ - x^۲$ صدق می‌کند.

۳۲) فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است و $z = f(x,y)$. اگر $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$ و $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ (α ثابت)، نشان دهید $(\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲ = (\frac{\partial z}{\partial u})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial v})^۲$.

۳۳) ثابت کنید تابع $f(x,t) = \int_۰^{\frac{x}{۲\sqrt{kt}}} e^{-\sigma^۲} d\sigma$ در معادله‌ی دیفرانسیل $k\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} - \frac{\partial f}{\partial t} = ۰$ صدق می‌کند (k ثابت).

۳۴) با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید

الف) $z = f(bx - ay)$ در معادله‌ی $a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

ب) $w = f(\frac{xy}{x^۲ + y^۲})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

ج) $z = f(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ صدق می‌کند.

د) $z = xf(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ صدق می‌کند.

۳۵) فرض کنید f و g دوبار مشتق‌پذیرند و $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$. نشان دهید $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$.

۳۶) فرض کنید معادله‌ی $xz^۲ = \ln(y^۲ + z^۲)$، تابع z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y بیان می‌کند. مطلوب است تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$.

۳۷) تابع $z = z(x,y)$ به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = ۰$ داده شده است. با فرض این که f مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

۳۸) فرض کنید f یک تابع دو متغیره با مشتقات جزیی پیوسته باشد و

$$f(x_۰, y_۰) = f_x(x_۰, y_۰) = f_y(x_۰, y_۰) = ۰$$
$$f_{xx}(x_۰, y_۰)f_{yy}(x_۰, y_۰) - f_{xy}^۲(x_۰, y_۰) > ۰$$

الف)نشان دهید نقطه‌ی $P = (x_۰, y_۰)$ یک نقطه‌ی تنها برای نمودار $f(x,y) = ۰$ است، یعنی یک همسایگی از P وجود دارد که در آن f تنها در P صفر می‌شود.

ب) نشان دهید که مبدا یک نقطه‌ی تنها برای خم به معادله‌ی $x^۳ - y^۳ + xy^۲ - yx^۲ + x^۲ + y^۲ = ۰$ است.

۳۹) مکان هندسی نقاطی از رویه‌ی $x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ + xy + ۲xz + ۴yz = ۸$ را بیابید که صفحه‌ی مماس در آن نقاط موازی صفحه xy باشد.

۴۰) خط مماس بر خم γ حاصل از برخورد دو رویه‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ و $xy + z = ۰$ را در نقطه‌ی $(۲, ۱, -۲)$ بیابید.

۴۱) صفحات مماس در $M = (x,y,z)$ برای $x > ۰$، $y > ۰$ و $z > ۰$ بر رویه‌ی

$$x^{۲/۳} + y^{۲/۳} + z^{۲/۳} = a^{۲/۳} \quad (\text{عددی ثابت و مثبت } a)$$

محور ox و oy و oz را به ترتیب در نقاط A، B و C قطع می‌کنند. نشان دهید $OA^۲ + OB^۲ + OC^۲$ یک عدد ثابت است.

۴۲) نشان دهید اگر f همه جا مشتق‌پذیر باشد آنگاه صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = xf(\frac{y}{x})$ در هر نقطه، از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۴۳) بیضی‌گون به معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$ مفروض است.

(الف) نقاطی از رویه را مشخص کنید که قائم بر رویه در این نقاط با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد.

(ب) در چه نقاطی از رویه‌ی فوق صفحات مماس بر رویه موازی صفحات مختصات است؟ چرا؟

۴۴) خم C فصل مشترک رویه‌های $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ و $x^۲+y^۲+z=۰$ است. معادلات پارامتری خط مماس بر C را در نقطه‌ی $(۱,۰,-۱)$ بیابید.

۴۵) الف) صفحات مماس بر رویه‌ی $z=\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}$ و عمود بر خط $x-۱=y=z-۳$ را مشخص کنید.

ب) نقاطی از رویه‌ی قسمت قبل را مشخص کنید که صفحات مماس بر رویه در آن نقاط عمود بر محور zها باشند.

۴۶) نقاطی را در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ تعیین کنید که در آن نقاط بردار گرادیان تابع $f(x,y)=\ln(\frac{۱}{x}+y)$ بردار $-\frac{۱۶}{۹}\mathbf{i}+\mathbf{j}$ باشد.

۴۷) رویه‌ی $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ مفروض است.

(الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر رویه را در نقطه‌ی $(۱,۱,۱)$ به دست آورید.

(ب) نقطه‌ی برخورد دیگر خط عمود با رویه را به دست آورید.

(ج) ثابت کنید صفحه‌ی مماس در هر نقطه از رویه‌ی فوق دقیقا در دو خط راست با رویه اشتراک دارد.

۴۸) رویه‌ی $z=x^۲+y^۲$ و نقاط $A=(۱,۱,۰)$ و $B=(۲,۲,۲)$ مفروضند.

(الف) معادله‌ی خطی را به دست آورید که از A بگذرد و بر این رویه عمود باشد.

(ب) معادله‌ی صفحه‌ای شامل A و B را به دست آورید که بر رویه مماس باشد.

۴۹) نشان دهید بر مخروط $z^۲=۲x^۲+۴y^۲$ خطی وجود دارد که صفحه‌ی مماس بر مخروط در امتداد آن با صفحه‌ی $۱۲x+۱۴y+۱۱z=۲۵$ موازی است. خط و صفحه‌ی مماس را به دست آورید.

۵۰) مطلوب است معادلات پارامتری منحنی حاصل از برخورد سهمی‌گون $z=x^۲+y^۲$ و صفحه‌ی $z=۲$. اگر در هر نقطه از این منحنی، خطی عمود بر سهمی‌گون رسم کنیم، مجموعه‌ی این خطوط تشکیل مخروطی در فضا می‌دهند. معادله‌ی مخروط را به دست آورید.

۵۱) نقاطی را بر روی رویه‌ی $۲x^۲+y^۲-z^۲=۱$ پیدا کنید که صفحه‌ی مماس بر رویه در این نقاط عمود بر فصل مشترک دو صفحه‌ی $x=y$ و $z=y$ باشد.

۵۲) معادله‌ی خطوطی را بیابید که از مبدأ مختصات گذشته بر رویه‌ی $x^۲+y^۲+۹z^۲=۱$ عمود باشند.

۵۳) ثابت کنید صفحات مماس بر رویه‌ی $xyz = a^3$ ($a > 0$ ثابت) با صفحات مختصات، چهار وجهی‌هایی با حجم ثابت می‌سازند.

۵۴) معادله‌ی کلیه‌ی صفحات مماس بر کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ را تعیین کنید که شامل خط با معادلات پارامتری $x = t + 2$، $y = -2t$ و $z = t + 1$ باشند.

۵۵) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط قائم بر هر یک از رویه‌های زیر را در نقطه‌ی مورد نظر پیدا کنید.

(الف) $xyz = a^3$، P نقطه‌ی دلخواه بر رویه.

(ب) $z = 2\sin x \cos y$، $P = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)$.

۵۶) در کدام‌یک از نقاط مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$، صفحه‌ی مماس و خط قائم تعریف نشده‌اند؟ توضیح دهید.

۵۷) معادلات صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه‌ی درجه‌ی دوم $Ax^2+By^2+Cz^2 = 1$ در نقطه‌ی دلخواه از این رویه را پیدا کنید.

۵۸) بیضی‌گون $x^2 + y^2 + 3z^2 = 66$ دو صفحه‌ی مماس موازی با صفحه‌ی $x + y + z = 1$ دارد. معادله‌ی این صفحات را همراه با نقاط تماسشان پیدا کنید.

۵۹) نشان دهید رویه‌های $z = xy - y^2 + 8y - 5$ و $z = e^{2x+y+4}$، در نقطه‌ی $P = (-3, 2, 1)$ بر هم مماسند و صفحه‌ی مماس مشترکشان را پیدا کنید.

۶۰) فرض کنید C خمی با معادله‌ی $F(x,y) = 0$ باشد که در آن F دارای مشتقات جزئی پیوسته‌ای است که همزمان صفر نمی‌شوند.

الف) نشان دهید معادله‌ی خط مماس بر C در (x_0, y_0) به شکل زیر است:

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

ب) خطوط مماس و قائم بر خم‌های $x^3y - x^2y^2 + xy^3 = 1$ و $x^y = y^x$ را در $(1, 1)$ پیدا کنید.

۶۱) فرض کنید درجه‌ی حرارت در نقطه‌ی (x,y) از صفحه‌ی xy با رابطه‌ی $T(x,y) = \frac{4x}{x^2 + y^2}$ بیان می‌شود. ثابت کنید در هر نقطه‌ی (x_0, y_0) روی دایره‌ی $(x - 2)^2 + y^2 = 4$، بین همه سوها، در سوی شعاع این دایره بیشترین مقدار تغییر درجه حرارت را داریم. این مقدار تغییر چقدر است؟

۶۲) کلیه‌ی سوهای $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$ را پیدا کنید که برای تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y-۲ & y=۱ \quad \text{یا} \quad x=۱ \\ t & y\neq ۱ \ , \ x\neq ۱ \end{cases}$$

مشتق سویی f در سوی $\mathbf{u}$ و در نقطه‌ی $(۱,۱)$ وجود داشته باشد.

۶۳) سوهایی را بدست آورید که تابع $f(x,y) = (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲$ در $(۰,۰)$ دارای مشتق سویی برابر با ۲ باشد.

۶۴) برای هر یک از توابع زیر مشتق سویی را در نقطه‌ی P و در جهت بردار $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

الف) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j}\ ,\ P = (-۱,۴)\ ,\ f(x,y) = x^۳ - ۲xy + y^۲ + ۸$

ب) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}\ ,\ P = (۱,۳)\ ,\ f(x,y) = \ln(x^۲ + y^۲)$

ج) $\mathbf{a} = -۱۰\mathbf{i} + ۱۰\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}\ ,\ P = (-۱,۱,۲)\ ,\ f(x,y,z) = \dfrac{z}{xy}$

۶۵) برای $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$، مشتق سویی f را در $(۲,۳,-۴)$ و در سویی که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد پیدا کنید.

۶۶) اگر $f(x,y) = xy$، بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که $D_{\mathbf{u}}f(۳,۴) = ۰$.

۶۷) تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin(\dfrac{y}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

مفروض است. کلیه‌ی سوهایی را به دست آورید که f در آن‌ها در مبدأ مختصات دارای مشتق سویی باشد.

۶۸) تابع $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

الف) مشتق سویی این تابع را در نقطه‌ی $(۰,۰)$ و در سوی بردار $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ تعیین کنید.

ب) مطلوب است تعیین $\nabla f(۰,۰)\cdot\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶۹) مشتق سویی توابع زیر را در نقاط وجهت‌های داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x,y,z) = \cos(xy) + \sin(yz)\ ,\ P_۰ = (۰,\pi,۱)\ ,\ \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

ب) $g(x,y,z) = ze^{xy}\ ,\ P_۰ = (۱,۰,۱)\ ,\ \mathbf{v} = \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$

۷۰) تابع $f(x,y) = x^{۲} - ۲xy^{۲}$ و نقطه‌ی $P_{\circ} = (۱, -۲)$ مفروضند.

الف) از نقطه‌ی $P_{\circ}$ در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت افزایش یابد؟

ب) در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت کاهش یابد؟

۷۱) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = ۴ - x^{۲} - y^{۲}$ و نقطه‌ی $(۱, ۱, ۲)$ بر آن مفروضند. مشخص کنید که از این نقطه در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع با بیشترین سرعت کاهش یابد و در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع تغییر نکند؟

۷۲) اکسترمم‌های موضعی (نسبی) توابع زیر و نوع آن‌ها را در صفحه‌ی $\mathbb{R}^{۲}$ تعیین کنید.

الف) $f(x,y) = xy(۱ - x^{۲} - y^{۲})$

ب) $f(x,y) = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + xy \qquad (x > \circ, y > \circ)$

۷۳) به کمک یک تابع دو متغیره‌ی مناسب و محاسبه‌ی مینیمم مطلق این تابع، فاصله‌ی بین دو خط متنافر $L_{۱} : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t - ۱ \end{cases}$ و $L_{۲} : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ را تعیین کنید.

۷۴) روی کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱$، نقطه‌ای را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطه‌ی $(۲, \circ, \circ)$ و $(\circ, ۲, \circ)$ مینیمم باشد.

۷۵) ابعاد مکعب مستطیلی را در یک هشتم اول فضا $(z \geq \circ, y \geq \circ, x \geq \circ)$ بیابید که یک رأس آن در مبدأ مختصات، رأس مقابل این رأس روی صفحه‌ی $x + ۲y + ۳z = ۱$ و حجم آن ماکزیمم باشد.

۷۶) فرض کنید x، y و z اضلاع یک مثلث، p نصف محیط این مثلث و S مساحت این مثلث باشد. به کمک فرمول $S^{۲} = p(p-x)(p-y)(p-z)$ ثابت کنید بین همه مثلث‌های با محیط ثابت $۲k$، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

۷۷) نقطه‌ای بر خط $L : \begin{cases} x + y = ۱ \\ y + z = ۱ \end{cases}$ بیابید که مجموع مربعات فواصل آن از صفحات مختصات کمترین مقدار ممکن باشد.

۷۸) مثلث ABC با اضلاعی به طول‌های a، b و c و مساحت ۴ مفروض است. M نقطه‌ای در درون مثلث است که فاصله‌اش تا اضلاع مثلث به ترتیب x، y و z می‌باشد.

الف) تحقیق کنید $ax+by+cz=۸$.

ب) x و y و z را طوری تعین کنید که $x^۲+y^۲+z^۲$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۷۹) صفحه $\frac{x}{۶a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ مفروض است. a و b و c $(a,b,c>۰)$ را چنان بیابید که در شرط $a^۲+b^۲+c^۲=۱$ صدق کنند و حجم هرم حاصل از برخورد صفحه‌ی فوق با صفحات مختصات ماکزیمم باشد (حجم هرم $\frac{۱}{۶}$ حجم متوازی‌السطوحی است که روی یال‌های آن ساخته می‌شود).

۸۰) معادله‌ی کره‌ای به مرکز مبدا را بنویسید که رویه‌ی استوانه‌ای $xy=۱$ را در دو و تنها دو نقطه قطع کند.

۸۱) بیشترین میزان افزایش تابع $f(x,y,z)=xy^۲z^۳$ در نقطه‌ی $P=(۲,۱,-۱)$ چقدر است و در چه سویی اتفاق می‌افتد؟

۸۲) فرض کنید تابع دو متغیره‌ی f در داخل یک دایره یا مستطیل D مشتق‌پذیر بوده و در هر نقطه‌ی داخل آن بردار گرادیان برابر با صفر باشد. نشان دهید f روی D یک تابع ثابت است.

۸۳) برای توابع زیر نقاط بحرانی را مشخص کرده و تعیین کنید ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه‌ی زینی هستند.

الف) $f(x,y)=۲x^۲+(y-۱)^۲$

ب) $f(x,y)=۸x^۳+y^۳-۱۲xy+۶$

ج) $f(x,y)=(x-۱)\ln xy \quad (xy>۰)$

۸۴) فرض کنید تابع f روی $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲\leq ۴\}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=x^۲-y^۲$ تعریف شده باشد. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D به دست آورید.

۸۵) به کمک بسط تیلور ثابت کنید تابع حقیقی و سه متغیره‌ی f با مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته، دارای یک مینیمم موضعی در نقطه‌ی بحرانی $P=(a,b,c)$ است هرگاه سه مقدار A، D و E که توسط روابط

$$A=f_{xx}\ ,\ D=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, E=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

تعریف می‌شوند، در نقطه‌ی P مثبت باشند. همچنین f در P دارای یک ماکزیمم موضعی است هرگاه در نقطه‌ی P داشته باشیم $A < 0$, $D > 0$, $E < 0$.

به کمک آنچه بیان شد، مقادیر ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - 9x - 3y + 4z + 10$ را پیدا کنید.

۸۶) آیا تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ در مبدأ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است؟

۸۷) با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را با قید داده شده در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x,y) = x^2 + 8y^2 \ , \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

ب) $f(x,y,z) = 2x - 3y + z - 1 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 = 14$

ج) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \ , \ x - 2y + 2z = 6$

د) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \ , \ 2x^2 + y^2 - z^2 = 2$

ه) $f(x,y,z) = xy + xz \ , \ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4$

۸۸) با استفاده از روش تکثیرکننده‌های لاگرانژ مطلوب است:

الف) فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (-1,4)$ و خط $12x - 5y + 71 = 0$.

ب) نقاطی از بیضی با معادله‌ی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدا کمترین یا بیشترین مقدار است.

ج) فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (1,1,1)$ و صفحه‌ی π به معادله‌ی $2x + 6y - 9z + 12 = 0$.

د) فاصله‌ی بین مبدأ و مقطع صفحات $x + 2y - z - 5 = 0$ و $x - y + z - 3 = 0$.

۸۹) اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را روی ناحیه‌های مشخص شده تعیین کنید.

الف) $f(x,y) = x^2 + xy \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

ب) $f(x,y) = 2x - y^2 \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$

ج) $f(x,y) = \sin(\frac{\pi xy}{2}) \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$

د) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & (x,y) = \mathbf{0} \end{cases} \ , D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

۹۰) درجه‌ی حرارت نقاط ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ با رابطه‌ی $T(x,y) = x^۲ + ۲y^۲ - x$ داده می‌شود. گرم‌ترین و سردترین نقاط D کدامند؟

۹۱) اکسترمم‌های مقید توابع زیر را تحت شرط‌های داده شده تعین کنید.

الف) $f(x,y,z) = x + y + z \ , \ g(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۳ = ۰$

ب) $f(x,y,z) = xyz \ , \ g(x,y,z) = ۲xy + ۳xz + yz = ۷۲$

ج) $f(x,y,z) = xy \ , \ g(x,y,z) = y^۲ + z^۲ - ۱$

۹۲) نقطه‌ای را بر صفحه‌ی $x + ۴y + ۳z = ۲$ تعیین کنید که تابع $f(x,y,z) = ۲x^۲ + ۳y^۲ + z^۲$ در آن دارای کمترین مقدار باشد.

۹۳) نزدیکترین نقطه به مبدا مختصات و واقع بر رویه‌ی $xyz = ۸$ را تعیین کنید و نشان دهید خط واصل از مبدا به این نقطه، بر رویه عمود است.

۹۴) تعیین کنید در کدام مثلث مجموع سینوس زوایا بیشترین مقدار ممکن را دارد؟