تمرین‌های فصل چهارم

۱) هر یک از انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\iint_D e^y\,dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به خم $y=\ln x$، بالای محور x، بین خطوط ۱ $=x$ و ۲ $=x$ است.

ب) $\iint_D xy\,dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محصور بین نمودار $y=\sin x$ و خط ۱ $=y$ برای $\circ\le x\le\frac{\pi}{۲}$ است.

ج) $\iint_D |x^۲-y|\,dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی مربعی $[\circ,۱]\times[\circ,۱]$ است.

د) $\iint_D \frac{۱}{۱+y^۴}\,dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محصور توسط خم $y=x^{\frac{۱}{۳}}$ و خط‌های ۲ $=y$ و $\circ$ $=x$ است.

۲) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت هر یک از نواحی زیر را تعیین کنید.

الف) ناحیه‌ی داخل دایره‌ی ۴ $=x^۲+y^۲$ و سمت راست خط ۱ $=x$.

ب) ناحیه‌ی محصور بین خم‌های ۱ $=xy$، ۲ $=xy$ و خطوط ۱ $=x$ و ۲ $=x$.

ج) ناحیه‌ی محصور به خم‌های $x=۴-۳y^۲$ و $x=y^۲$.

۳) فرض کنید تابع f پیوسته است. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری مجموع زیر را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید.

$$\int_\circ^۳ dx\int_\circ^x f(x,y)dy+\int_۳^۶ dx\int_\circ^{۶-x} f(x,y)dy$$

۴) انتگرال $\iint_D \frac{y}{x^۲+y^۲}\,dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به سهمی $y=x^۲$ و خط $y=x$ به دست آورید.

۵) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_\circ^۱\int_۱^۲ \frac{y}{x^۴}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy+\int_۱^۴\int_{\sqrt{y}}^۲ \frac{y}{x^۴}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy$.

ب) $\int_\circ^۲\int_\circ^{۴-x^۲} \frac{xe^{۲y}}{۴-y}dydx$.

ج) $\iint_A \sqrt{x^۲+y^۲}\,dA$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲;۱\le x^۲+y^۲\le ۲\}$.

د) $\int_\circ^۱\int_\circ^x \frac{dydx}{(۱+x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}+\int_۱^{\sqrt{۲}}\int_\circ^{\sqrt{۲-x^۲}} \frac{dydx}{(۱+x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$

ه) $\iint_A (x-y)\sin(x^2-y^2)\ dA$، A ناحیه‌ی بین خطوط $x+y=2$، $y-x=1$، $y-x=-1$ و $x+y=0$ است.

و) $\iint_A e^{\frac{y}{x+y}}\ dA$، A ناحیه‌ی بین خطوط $x+y=1$، $y=0$ و $x=0$ است.

ز) $\iint_G x\ dA$، G ناحیه‌ی بین خم‌های $xy=1$، $xy=3$، $x(1-y)=2$ و $x(1-y)=1$ است.

ح) $\iint_D \frac{dA}{(xy)^{\frac{2}{3}}}$، D ناحیه‌ی محصور به خم $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ است.

۶) مساحت ناحیه‌ی محصور به خم‌های $x^2=y\ ,\ x^2=2y\ ,\ x^3=y^2\ ,\ x^3=2y^2$ را به دست آورید.

۷) مساحت ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=4x$ و خطوط $y=x$ و $y=0$ را به دست آورید.

۸) انتگرال دوگانه‌ی $\iint_R xy\ dA$ را که در آن R ناحیه‌ای است محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ محاسبه کنید.

۹) مجموعه‌ی D را **همبند** می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه‌ی P و Q در D، یک خم پیوسته با معادلات پارامتری $x=x(t)\ ,\ y=y(t)$ به ازای $0 \leq t \leq 1$ وجود داشته باشد که $P=(x(0),y(0))$، $Q=(x(1),y(1))$ و برای هر $t\in[0,1]$ نقطه‌ی $(x(t),y(t))$ در D قرار گیرد. به عبارت دیگر هر دو نقطه‌ی دلخواه در D با یک خم پیوسته در D به هم قابل وصل باشند.

نشان دهید اگر تابع دو متغیره‌ی f روی حوزه‌ی همبند D به مساحت A پیوسته باشد، آنگاه یک نقطه مثل (a,b) در D وجود دارد به قسمی که:

$$\iint_R f(x,y)\ dA = Af(a,b)$$

این گزاره قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌های دوگانه نامیده می‌شود.

۱۰) الف) نشان دهید که اگر f و g دو تابع پیوسته بر فاصله‌ی $[a,b]$ باشند، آنگاه

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

(راهنمایی: از انتگرال $\iint_A (f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\ dA$ روی ناحیه‌ی مناسب A، استفاده کنید)

ب) اگر تابع f تابعی پیوسته و مثبت روی $[a,b]$ باشد، نشان دهید

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^۲$$

۱۱) مقدار انتگرال ناسره‌ی $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx$ را به دست آورید. (راهنمایی: ابتدا توجه کنید که تساوی $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx \int_۰^\infty e^{-y^۲}dy = \int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-(x^۲+y^۲)}dxdy$ برای انتگرال‌های ناسره برقرار است. سپس عبارت سمت راست را به کمک مختصات قطبی محاسبه کنید.)

۱۲) انتگرال $\int_۰^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ را حساب کنید. (راهنمایی: از رابطه‌ی $\int_a^b e^{-xy}dy = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ استفاده کنید.)

۱۳) انتگرال‌های زیر را به کمک تغییر متغیرهای مناسب محاسبه کنید.

الف) $\iint_D \frac{x^۲ \sin xy}{y}\ dA$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^۲ = \pi y$، $x^۲ = \frac{\pi y}{۲}$، $y^۲ = x$ و $y^۲ = \frac{x}{۲}$ است.

ب) $\iint_D \cos \frac{x-y}{x+y}\ dA$ که در آن D محدود است به خطوط $y = ۰$، $y = x$ و $x + y = \frac{\pi}{۲}$.

ج) $\iiint_T yz\ dV$ که T محدود به صفحات $x+y+z=۲$، $x+y+z=-۲$، $x-y+z=۳$، $x-y+z=-۳$، $x+y-z=۱$ و $x+y-z=-۱$ است.

۱۴) ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : \pi^۲ \leq x^۲+y^۲ \leq ۴\pi^۲\}$ و تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y) = \sin\sqrt{x^۲+y^۲}$ مفروضند. مقدار $\iint_D f(x,y)\ dA$ را به‌دست آورید.

۱۵) با استفاده از مختصات قطبی انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D \sqrt{\frac{۱-x^۲-y^۲}{۱+x^۲+y^۲}}\ dA$ را محاسبه کنید که در آن D قرص واحد $\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲ \leq ۱\}$ است.

۱۶) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیر قطبی محاسبه کنید.

الف) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲ \leq ۹\}$ ، $\iint_D \sqrt{x^۲+y^۲}\ dA$

ب) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : \frac{\pi^۲}{۱۶} \leq x^۲+y^۲ \leq \frac{\pi^۲}{۹}\}$ ، $\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\ dA$

ج) $\{\sqrt{3}x \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} , 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 : D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، $\iint_D \tan^{-1}(\frac{y}{x})\, dA$

۱۷) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت‌های هر یک از نواحی زیر را پیدا کنید.

الف) ناحیه‌ی داخل کاردیوئید $r = a(1-\cos\theta)$ و خارج دایره‌ی $r = a$.

ب) ناحیه‌ی محصور بین دوایر $x^2+y^2 = x$ و $x^2+y^2 = 2x$ و خطوط $y = 0$ و $y = x$.

ج) ناحیه‌ی بین مارپیچ‌های $r = \theta$ و $r = 2\theta$ به ازای $0 \leq \theta \leq 4\pi$.

۱۸) با استفاده از تغییر متغییرهای $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$، انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D x^2y^2(x^2+y^2)\, dA$ را به دست آورید که D ناحیه‌ای در ربع اول و محدود به هذلولی‌های $x^2-y^2 = 1$، $x^2-y^2 = 9$، $xy = 1$ و $xy = 2$ است.

۱۹) مطلوبست محاسبه انتگرال دوگانه‌ی $\int_0^2 (\int_{y/2}^1 \cos(\frac{\pi}{2}x^2)dx)dy$.

۲۰) انتگرال دوگانه $\iint_D |x-y|e^{x-y}\, dA$ را حساب کنید که در آن ناحیه‌ی D محدود به خطوط $x-y = 0$، $x-y = -4$ ، $x+y = 0$ و $x+y = 4$ است.

۲۱) تابع $f(x,y) = \frac{y}{x^4}\sin\frac{\pi x}{2}$ مفروض است. انتگرال $\int_0^1\int_1^2 f(x,y)dxdy$ روی ناحیه‌ی D از صفحه‌ی xy و انتگرال $\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dxdy$ روی ناحیه‌ی E از صفحه‌ی xy تعریف شده‌اند.

الف) نواحی D و E را در صفحه‌ی xy مشخص کنید.

ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_{D\cup E} f(x,y)dydx$.

۲۲) G ناحیه‌ی محصور به خم‌های $xy = 1$ و $xy = 3$ و $x(1-y) = 2$ و $x(1-y) = 1$ است. مطلوب است انتگرال $\iint_G x\, dA$.

۲۳) انتگرال $\iint_D \cos(\frac{x-y}{x+y})\, dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x = 0$ و $y = 0$ و $x+y = 2$ بیابید.

۲۴) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را حساب کنید.

الف) $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (xy+yz+zx)dxdydz$

ب) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

۲۵) مقدار متوسط تابع سه متغیره‌ی f روی $T \subseteq \mathbb{R}^3$، که حجم آن برابر V است توسط $\frac{1}{V}\iiint_T f(x,y,z)dV$ تعریف می‌شود. مقدار متوسط تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ را روی هرمی که از برخورد صفحه‌ی $x + y + z = 1$ با صفحات مختصات پدید می‌آید به دست آورید. آیا می‌توان روی T نقطه‌ای را به دست آورد که در آن f مقدار متوسط خود را اختیار کند؟

۲۶) حجم محصور از بالا به کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$، از زیر به مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}\cot\beta$ و از دو طرف به صفحات $y = x\tan\alpha$ و $y = 0$ را به دست آورید. (α و β اعداد حقیقی ثابت با شرط $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ هستند.)

۲۷) فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای هر عدد مثبت t تعریف می‌کنیم $g(t) = \iiint_{D_t} f(x^2 + y^2 + z^2)\, dV$ که در آن $D_t = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le t^2\}$. مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{dg}{dt}$.

۲۸) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\iiint_T z\, dV$ که در آن T ناحیه‌ی بین صفحه‌ی $z = 0$ و نیمه‌ی بالایی کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

ب) $\iiint_T (x+y)\, dxdydz$ که در آن T ناحیه‌ی محصور توسط صفحه‌ی $x + y + z = 2$ و صفحات مختصات و زیر صفحه $z = 1$ است.

۲۹) حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌های $y^2 = 4 - 3x$ و $y^2 = x$ و صفحات $z = 9$ و $z = -9$ را به دست آورید.

۳۰) حجم ناحیه‌ای را به دست آورید که توسط سه رویه‌ی $z^2 = 2xy$، $x + y = 2$ و $x + y = 1$ مشخص می‌شود.

۳۱) حجم هر یک از نواحی زیر را به دست آورید.

الف) T محدود به سهمیگون $az = x^2 + y^2$ و صفحه‌ی $z = a$ ($a > 0$).

ب) T ناحیه‌ی محصور به کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و سهمی‌گون $x^2 + y^2 = 4(1 - z)$.

ج) T درون مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و خارج کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

۳۲) مطلوب است انتگرال $\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dV$ که در آن T ناحیه‌ای در یک هشتم اول فضا محدود به مخروط بیضوی $z^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ و صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 1$

است.

۳۳) معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} - z^{۲} = ۱$ را به معادله‌ای در دستگاه مختصات استوانه‌ای تبدیل کنید.

۳۴) معادله‌ی $x^{۲} + y^{۲} = z^{۲}$ را در مختصات کروی بنویسید.

۳۵) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را با تبدیل به مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

الف) $\iiint_T x^{۲}y^{۲}\ dV$ که در آن T محدود است به مخروط $z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ و صفحه‌ی $z = a$ $(a > ۰)$.

ب) $\iiint_T (x^{۳} + y^{۳})\ dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = y$، سهمی‌گون $z = x^{۲} + y^{۲}$ و صفحه‌ی $z = ۰$.

۳۶) با استفاده از مختصات استوانه‌ای حجم ناحیه‌ی T شامل مبدأ مختصات و محدود به هذلولی‌گون $x^{۲} + y^{۲} - z^{۲} = ۱$ و کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۳$ را پیدا کنید.

۳۷) مقدار انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیر کروی پیدا کنید.

الف) $\iiint_T \frac{۱}{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}\ dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۴$ و مخروط $x^{۲} + y^{۲} = z^{۲}$.

ب) $\iiint_T \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲} + (z - ۲)^{۲}}}\ dV$ که در آن T ناحیه‌ی درونی کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱$ است.

ج) $\iiint_T \frac{۱}{\sqrt{((x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۳}}}\ dV$ که در آن T بین دو کره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = ۱$ و $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = e$ قرار دارد.

۳۸) با استفاده از مختصات کروی حجم ناحیه‌ی محصور توسط کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۴z - ۳$ و درون مخروط $z^{۲} = ۴(x^{۲} + y^{۲})$ را پیدا کنید.