تمرین‌های فصل پنجم

۱) انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{C_۱} \frac{ds}{x-y}$ ب) $\int_{C_۲} \frac{y}{\sqrt{x}} ds$

که $C_۱$ پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $P = (۰, -۳)$، $Q = (۶, ۰)$ و معادلات پارامتری $C_۲$ عبارتند از $x = ۳t^۲$ و $y = ۲t^۳$ به ازای $۱ \leq t \leq ۲$.

۲) انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{C_۱} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^۲ + y^۲}$

ب) $\int_{C_۲} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$

ج) $\int_{C_۳} \frac{xdy - ydx}{x^۲ + xy + y^۲}$

که $C_۱$ دارای معادلات پارامتری $x = ۲\cos t$، $y = ۲\sin t$ به ازای $۰ \leq t \leq \pi$، $C_۲$ مربعی با رئوس $(۱, ۰)$، $(۰, ۱)$، $(-۱, ۰)$، $(۰, -۱)$ (در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و $C_۳$ دایره‌ای به معادلات پارامتری $x = a\cos t$، $y = a\sin t$، $(a > ۰)$ به ازای $۰ \leq t \leq ۲\pi$ است.

۳) C خم بسته‌ی همواری است که نسبت به مبدا متقارن است. ثابت کنید

$$\int_C (yx^۳ + e^y)dx + (xy^۳ + xe^y - ۲y)dy = ۰$$

۴) به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال

$$\int_C (-x^۲y)dx + (xy^۲)dy$$

را حساب کنید که در آن C مرز ناحیه‌ی محصور به دوایر $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ است.

۵) فرض کنید $f(x, y) = \frac{۱}{|x| + |y|}$ و C مربعی با رئوس $A = (۱, ۰)$، $B = (۰, ۱)$، $C = (-۱, ۰)$ و $D = (۰, -۱)$ باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C f(x, y)dx + f(x, y)dy$.

۶) الف) با استفاده از قضیه‌ی گرین نشان دهید هرگاه توابع دو متغیره‌ی P و Q روی حوزه‌ی همبند ساده‌ی D دارای مشتقات نسبی پیوسته باشند و در هر نقطه‌ی $(x,y) \in D$ داشته باشیم $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ آن‌گاه $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان است.

ب) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_C \frac{x-y}{x^۲+y^۲}dx + \frac{x+y}{x^۲+y^۲}dy$ که C یک خم هموار بسته حول مبدأ مختصات است.

ج) انتگرال قسمت (ب) را در حالتی محاسبه کنید که C یک منحنی هموار ساده‌ی بسته باشد ولی مبدأ مختصات در داخل C نباشد.

۷) اگر γ کمان OA از خم به معادله‌ی $y = xe^{x-۱}$ باشد، به طوری که $A = (۱,۱)$ و $O = (۰,۰)$، مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی‌الخط

$$\int_\gamma (۳x^۲y + y^۳)dx + (x^۳ + ۳xy^۲)dy$$

۸) مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال خط $\int_C |y|dx + |x|dy$ که C منحنی متشکل از کمان AB، قسمتی از دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ واقع بر نقطه‌ی $A = (۰,۲)$ و $B = (-۱,۱)$ و BC قسمتی از خط $x + ۶y = ۵$ واقع بر نقطه‌ی $B = (-۱,۱)$ و $C = (۲, \frac{۱}{۲})$ است.

۹) در هر یک از حالات زیر تحقیق کنید آیا میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان است؟ در صورت مثبت بودن جواب یک تابع دو متغیره‌ی f همراه با دامنه‌اش چنان تعیین کنید که در آن دامنه بردار گرادیان تابع f برابر $\mathbf{F}$ باشد.

الف) $\mathbf{F} = (y - \frac{\sin^۲ y}{x^۲})\mathbf{i} + (x + \frac{\sin ۲y}{x})\mathbf{j}$

ب) $\mathbf{F} = (۲x\cos^۲ y)\mathbf{i} + (۲y - x^۲ \sin ۲y)\mathbf{j}$

۱۰) اگر تابع دو متغیره‌ی u چنان وجود داشته باشد که $du = Pdx + Qdy$ (P و Q توابعی دو متغیره هستند) آن‌گاه فرم دیفرانسیلی $Pdx + Qdy$ را یک فرم دیفرانسیلی کامل می‌نامیم. نشان دهید که $Pdx + Qdy$ یک فرم دیفرانسیلی کامل است اگر و تنها اگر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان باشد.

۱۱) به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال‌های خطی زیر را روی خم‌های داده شده در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت محاسبه کنید.

الف)

$$\int_C \sqrt{x^۲+y^۲}dx + [xy^۲ + y\ln(x+\sqrt{x^۲+y^۲})]dy$$

که در آن C مربعی است با رئوس $(۱,۰)$، $(۴,۰)$، $(۴,۵)$ و $(۱,۵)$.

ب)

$$\int_C \frac{xy^۲}{۱+x^۲}dx + y\ln(۱+x^۲)dy$$

که در آن C دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲y=۰$ است.

۱۲) به کمک انتگرال خطی، مساحت نواحی زیر را به دست آورید.

الف) D محدود است به خم بسته‌ی C با معادلات پارامتری $x=a\cos^۳ t$، $y=a\sin^۳ t$، که در آن $a>۰$ و $۰\le t\le ۲\pi$.

ب) D محدود است به خم بسته‌ی C (کاردیوئید) با معادلات پارامتری $x=۲a\cos t-a\cos ۲t$، $y=۲a\sin t-a\sin ۲t$، که در آن $a>۰$ و $۰\le t\le ۲\pi$.

۱۳) تحقیق کنید که تساوی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=۱$$

در مورد نگاشت‌های $x=e^u\cos v$، $y=e^u\sin v$ و وارون آن‌ها برقرار است.

۱۴) مساحت رویه‌ی S را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) S قسمتی از کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=ax$ بریده می‌شود $(a>۰)$.

ب) S قسمتی از استوانه‌ی $x^۲+y^۲=ax$ است که در کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ قرار دارد $(a>۰)$.

ج) S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است که بین صفحه‌ی $z=۰$ و استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ قرار دارد.

۱۵) انتگرال‌های رویه‌ی زیر را حساب کنید.

الف) $\int\int_S xyz\,d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحه‌ی $x+y+z=۱$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

ب) $\int\int_S y\,d\sigma$ که در آن S قسمتی از سهمی‌گون $y=۲-x^۲-z^۲$ به ازای $y\ge ۰$ است.

ج) $\int\int_S (x^۲y^۲+x^۲z^۲+y^۲z^۲)d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲x$ بریده می‌شود.

۱۶) انتگرال‌های سطح (رویه‌ای) زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S نیم کره‌ی $z=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ است.

ب) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=\mathbf{i}-y^۲\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و S قسمتی از رویه‌ی $z=xy$ است که در بالای مربع $D=\{(x,y): ۰\leq y\leq ۲\ ,\ ۰\leq x\leq ۳\}$ قرار دارد.

ج) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ و صفحات $z=۰$ و $z=۳$ است.

۱۷) به کمک قضیه واگرایی گوس انتگرال رویه‌ای $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) $\mathbf{F}=۴x\mathbf{i}-۲y\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و S کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

ب) $\mathbf{F}=۳x\mathbf{i}-y^۲\mathbf{j}+z^۲\mathbf{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲$ و صفحات $z=۰$ و $z=۱$ است.

ج) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S هر رویه‌ی بسته‌ی دارای شرایط قضیه‌ی واگرایی است.

۱۸) به کمک قضیه‌ی استوکس انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot dr$ را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.

الف) $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-y\mathbf{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که در صفحه‌ی $z=x$ از برخورد صفحات $x=۰$، $x=۱$، $y=۰$ و $y=۲$ به وجود می‌آید.

ب) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x^۲\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که از برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ با صفحه‌ی $x+y+z=۲$ پدید می‌آید.

ج) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و C مثلثی است که رئوس آن به ترتیب عبارتند از $(۰,۰,۳)$، $(۱,۰,۳)$ و $(۲,۱,۳)$.

د) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و C منحنی حاصل از برخورد صفحه‌ی $z=x$ با کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است (جهت حرکت روی C از طرف مثبت محور z بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود).

۱۹) برای یک تابع حقیقی ۳ متغیره‌ی f، تابع حقیقی $\nabla^۲ f$ (لاپلاسین f) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^۲ f := \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$$

یا به طور صوری

$$\nabla^۲ := \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲} = \nabla \cdot \nabla$$

به عبارت دیگر می‌توان $\nabla^۲ f$ را تصویر f به وسیله‌ی عملگر $\nabla^۲$ به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\nabla^۲ : V \to V \quad ; \quad f \mapsto \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$$

نشان دهید $\text{curl}(\text{curl } \mathbf{F}) = \nabla(\text{div } \mathbf{F}) - \nabla^۲ \mathbf{F}$.

۲۰) فرض کنید f تابعی سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته است. نشان دهید

$$\nabla \cdot (f \nabla f) = ||\nabla f||^۲ + f \nabla^۲ f$$

۲۱) فرض کنید $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ یک میدان برداری روی ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ باشد و توابع P، Q و R بر این ناحیه مشتقات مرتبه دوم پیوسته داشته باشند.

الف) مطلوب است $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.

ب) نشان دهید $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^۲ \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ ، که در آن $\nabla^۲ \mathbf{F} := (\nabla^۲ P)\mathbf{i} + (\nabla^۲ Q)\mathbf{j} + (\nabla^۲ R)$.

۲۲) فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ دو میدان برداری مشتق‌پذیر باشند. نشان دهید

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

۲۳) فرض کنید f و g دو تابع سه متغیره با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده سطح S باشند به قسمی که خم مرزی آن C و $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه‌ی بر سطح S هستند. نشان دهید

(الف) $\int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$

(ب) $\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = ۰$

۲۴) برای بردار یکه‌ی $\mathbf{n}$، نماد $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ نماد دیگری برای مشتق سویی تابع f در راستای $\mathbf{n}$ است (به عبارت دیگر $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = D_{\mathbf{n}} f$ و اگر f تابعی مشتقپذیر باشد، $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$). فرض کنید T ناحیه‌ای بسته و کراندار از فضای $\mathbb{R}^۳$ و S سطح محصور کننده‌ی آن باشد. به علاوه فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه‌ی بیرونی سطح S است. اگر f و g دو تابع با مشتقات مرتبه دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده حجم T و سطح S باشند، نشان دهید

(الف) $\displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_T \nabla^۲ f\, dV$

(ب) $\displaystyle\iint_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_T (f\nabla^۲ g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

(ج) $\displaystyle\iint_S (f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}})\, d\sigma = \iiint_T (f\nabla^۲ g - g\nabla^۲ f)\, dV$