

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فصل سوم

رویه ها و دیگر دستگاههای مختصات

هدف‌های کلی

هدف کلی از ارائه این فصل آشناکردن دانشجو با مفهوم رویه ، رویه‌های
درجه دوم و رده بندی آنها و دستگاه‌های مختصات معروف در فضای سه
بعدی است.

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید

۱. مفاهیم مربوط به رویه های استوانه ای و دوار را بداند و به کار ببرد.
۲. رویه های درجه دوم را شناسایی کند.
۳. از روی معادله متعارفی درجه دوم ، شکل رویه معرف آن را تشخیص دهد.
۴. دستگاههای مختصات استوانه ای و کروی را بشناسد و از آنها استفاده کند.

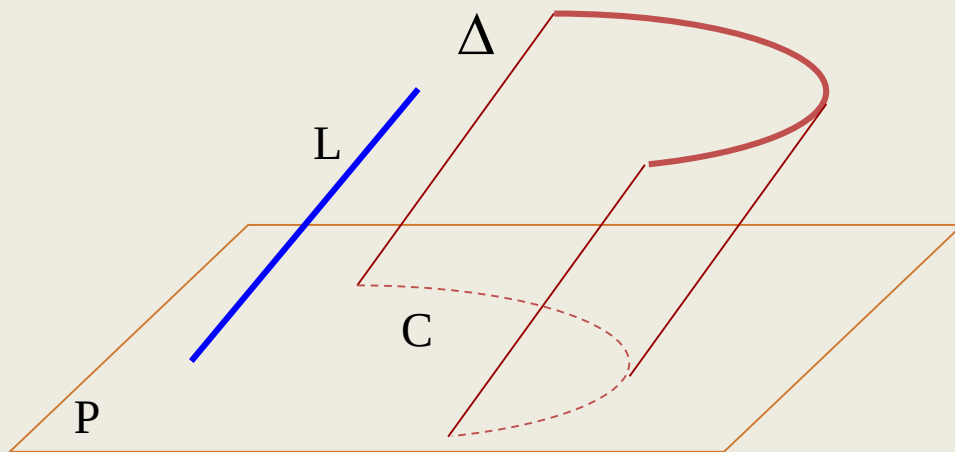
۳.۱ رویه های استوانه‌ای و رویه‌های دوار

۳.۱.۱ تعریف

فرض کنید C خمی واقع بر صفحه ای چون P و L خطی ناواقع بر این صفحه است که با آن موازی نیست. خطی که متکی بر C و موازی با L حرکت کند رویه ای تولید می‌کند. این رویه را استوانه یا **رویه استوانه‌ای** می‌نامیم.

خم C را **خم هادی** استوانه و هر یک از خطهای موازی با L و متکی بر خم C را

یک **مولد** استوانه می‌نامیم.



۲.۱.۳ مثال:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

می دانیم که معادله های

معادله های دایره به مرکز $(0, 0, 0)$ و شعاع $r = 1$ در صفحه xOy هستند. حال

اگر خطی بر این دایره تکیه و موازی با محور Z حرکت کند ، یک استوانه قائم

پدید می آورد.

معادله های پارامتری خطی از این نوع که از نقطه واقع بر دایره $(x_0, y_0, 0)$ می گذرد

عبارتست از

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = t$$

با توجه به این معادله ها می بینیم که Z دلخواه است و از $-\infty$ تا $+\infty$ می تواند

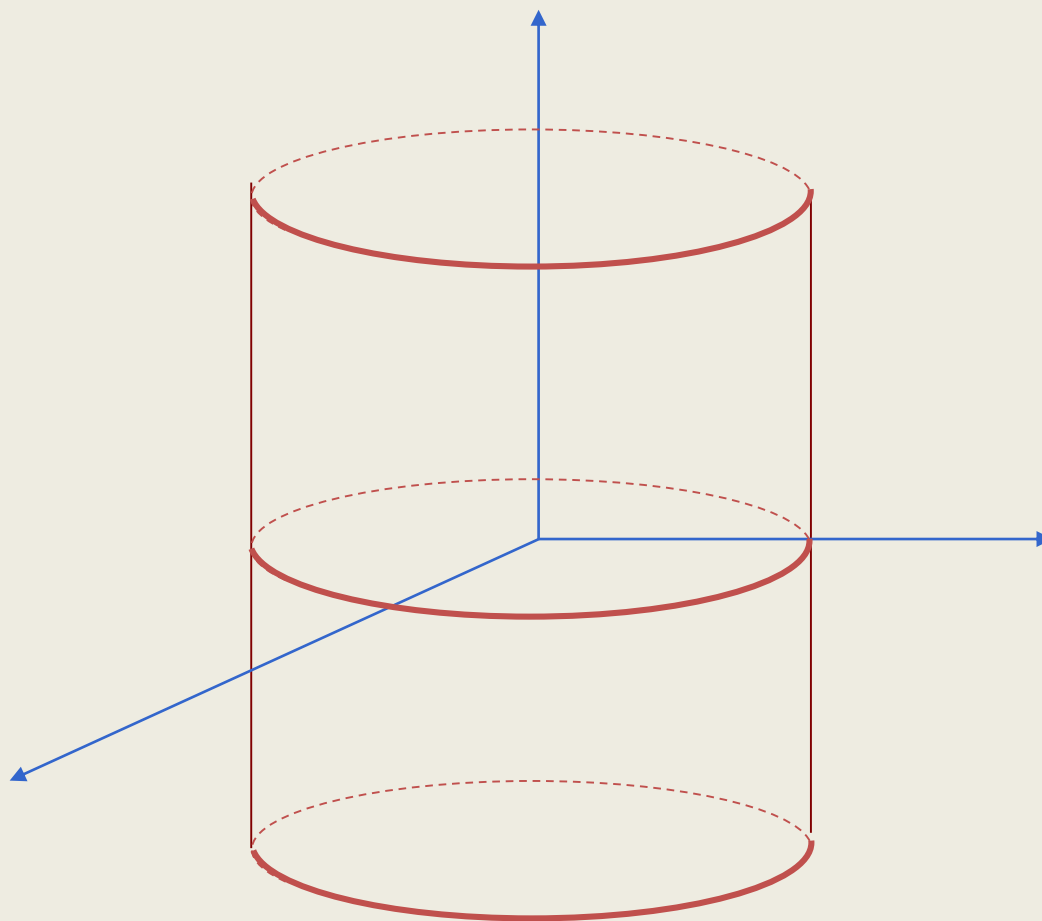
تغییر کند. از این معادله ها و را حذف می کنیم و معادله زیر را بدست

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 1$$

می آوریم.

عدم وجود Z در این معادله نشانه دلخواه بودن Z است. بنابراین (۱) معادله مورد

بحث است. در شکل زیر قسمتی از این استوانه نشان داده شده است.



۳.۱.۳ معادله استوانه

بطور کلی هر خم C در فضای سه بعدی مجموعه $\mathbb{R}^3$ جواب های یک دستگاه

دو معادله سه مجهولی است. حال اگر این معادله ها را

$$f(x,y,z)=0 \quad \text{و} \quad g(x,y,z)$$

بنامیم آنگاه خم C را به صورت

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

نشان می دهیم.

حال فرض کنید هادی استوانه‌ای توسط دستگاه معادله های

$$(2) \quad C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

داده شده باشد. اگر خط D یکی از مولدهای این استوانه ای باشد، D را

می توان فصل مشترک دو صفحه در نظر گرفت، یعنی

$$(3) \quad D : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \lambda \\ a_2x + b_2y + c_2z = \mu \end{cases}$$

توجه کنید که وقتی در این دستگاه و تغییر λ کنند خطوط موازی D

حاصل می شوند.

$\mu \quad \lambda$

حال فرض کنید $A(x,y,z)$ نقطه‌ای روی استوانه‌ای باشد. در این صورت و

باید چنان اختیار شوند که نقطه $A(x,y,z)$ در معادله‌های (۳) صدق کند.

از طرف دیگر به ازای این مقادیر و خط D باید خم C قطع کند، بنابراین

D باید در نقطه‌ای چون $B(s,t,u)$ مشترک باشند. یعنی این نقطه باید در

معادله‌های (۲) و (۳) به طور همزمان صدق کند، یعنی

$$\begin{cases} f(s, t, u) = 0 \\ g(s, t, u) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 s + b_1 t + c_1 u = \lambda \\ a_2 s + b_2 t + c_2 u = \mu \end{cases}$$

اکنون بین این معادله‌ها s, t, u را حذف می‌کنیم و در معادله حاصل

قرار می‌دهیم

$$\lambda = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = \mu$$

و معادله استوانه را در نظر می‌گیریم.

۴. ۱. ۳ مثال:

می خواهیم معادله استوانه‌ای را بنویسیم که C هادی آن دارای معادله‌های

$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

و مولد آن موازی خط $x = y = z$ باشد.

حل:

$$D : \begin{cases} x - y = \lambda \\ x - z = \mu \end{cases}$$

معادله‌های مولد را به صورت

$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ z = 0 \\ x - y = \lambda \\ x - z = \mu \end{cases}$$

در نظر می گیریم. حال از دستگاه معادله‌های

X, Y, Z را حذف می کنیم ، نتیجه می شود .

$$x = \mu \quad , \quad y = \mu - \lambda \quad , \quad (\mu - \lambda)^2 = 4\mu^2$$

در نتیجه معادله استوانه مورد نظر عبارتست از

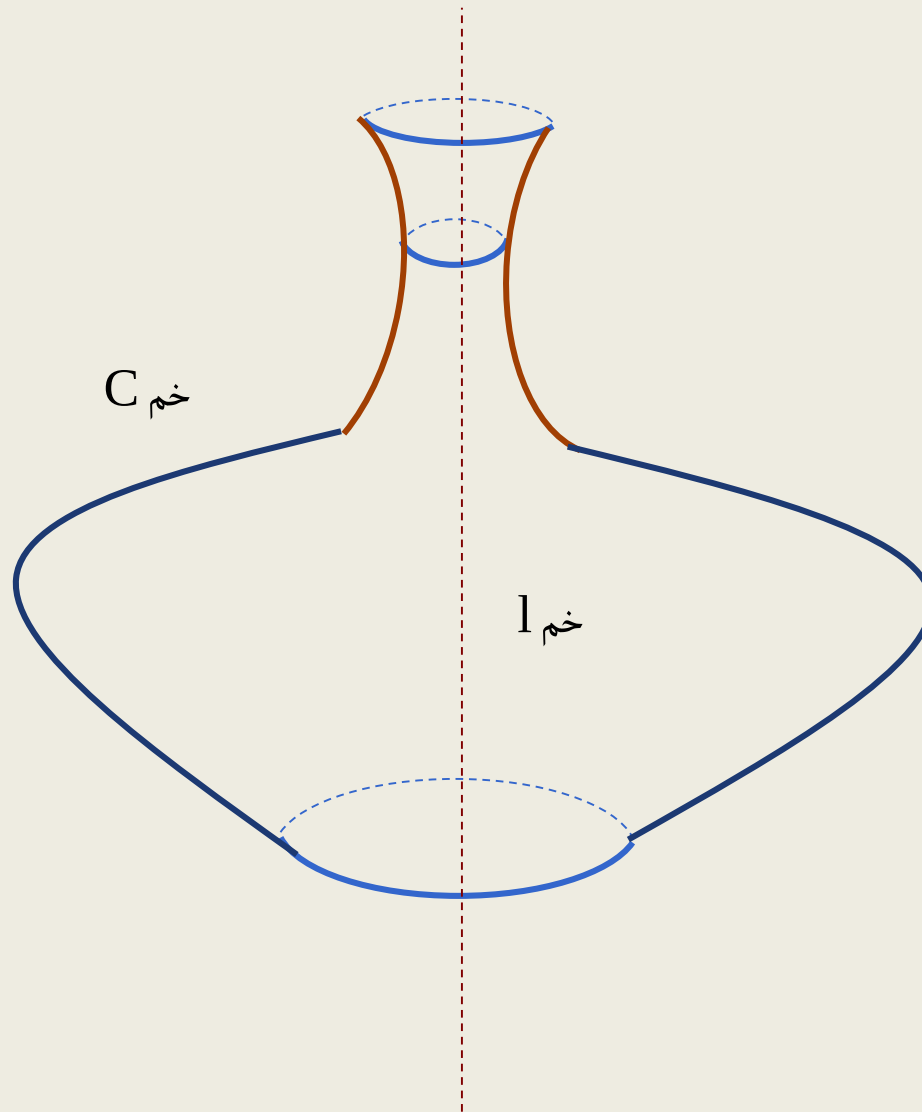
$$(x - z - x + y) = 4(x - z)^2$$

یا

$$4x^2 + 4z^2 - 8xz - y + z = 0$$

۵.۱.۳ تعریف

خم C و خط l را که هردو روی یک صفحه هستند ، در نظر می گیریم. اگر C حول l دوران کند ، رویه ای به نام **رویه دوار** حاصل می شود. خم C را یک مولد و خط l را **محور دوران** این رویه می نامیم.



می خواهیم معادله رویه دواری را که از دوران خم C حول محور l پدید می آید بدست آوریم.

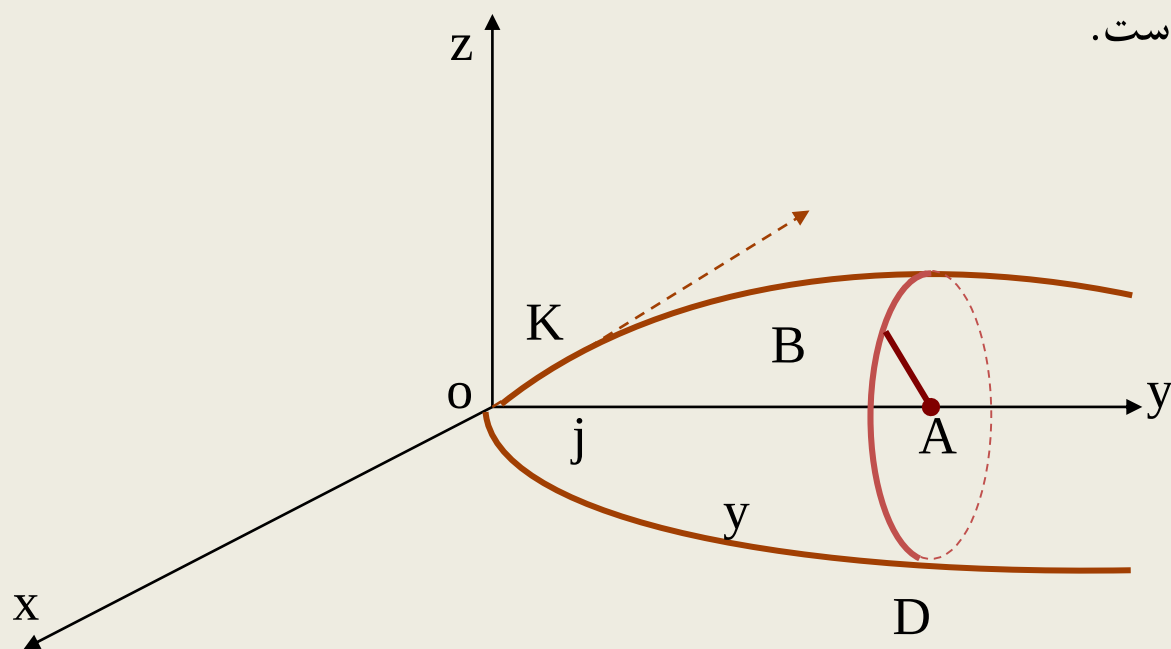
۶. ۱. ۳ مثال

خم x^2 حول محور y دوران می کند ، معادله رویه دوار حاصل را پیدا کنید.

حل:

وقتی x^2 حول محور y دوران می کند هر نقطه اش دایره ای پدید می آورد

که مرکز آن روی محور y است.



فرض کنید $B(x_1, y_1, z)$ نقطه‌ای روی این رویه باشد. از B صفحه عمود

بر محور دوران ، محور Oy را رسم می‌کنیم تا رویه را در دایره‌ای به مرکز A

و خم C را در نقطه D قطع کند. مختصات A عبارتست از $(0, y, 0)$ اگر D دارای

مختصات $(x', y', 0)$ باشد، باید داشته باشیم.

$$y' = y \quad , \quad y' = x'^2 \quad (۴)$$

چون فاصله D و B از نقطه A باهم برابر است ، داریم:

$$\sqrt{(x' - 0)^2 + (y' - y')^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y)^2 + (z - 0)^2}$$

واز این رو ، با توجه به این رابطه و روابط (۴) معادله رویه دوار به صورت زیر حاصل

$$y = x^2 + z^2 \quad \text{می شود}$$

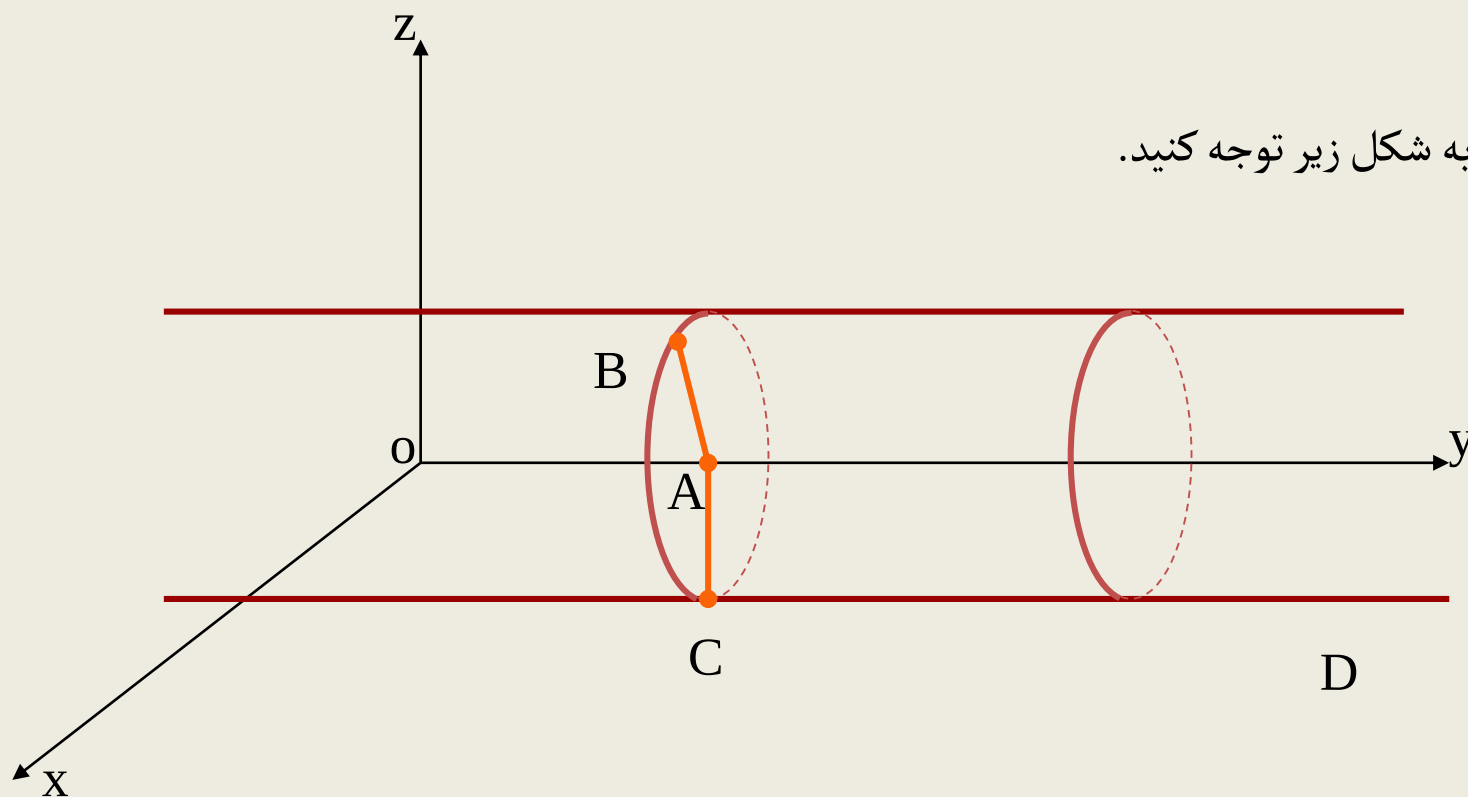
این رویه را **سه‌می‌وار دوار** می‌نامیم.

۷.۱.۳ مثال

فرض کنید خط D واقع بر صفحه XOY و موازی با محور Y ، حول این محور دوران کند. در این صورت یک استوانه پدید می‌آید. می‌خواهیم معادله این استوانه را به دو طریق بدست آوریم.

حل:

راه حل اول. به شکل زیر توجه کنید.



فرض کنید $B(x,y,z)$ نقطه دلخواهی واقع بر استوانه باشد. این نقطه بر دایره به

مرکز $A(0,y,0)$ واقع است. این دایره خط D را که دارای معادله $x=c$ است در

نقطه $C(c,y,0)$ قطع می کند. از تساوی $AC=BC$ نتیجه می شود:

$$(c-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2 = (x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2$$

واز این رو ، معادله استوانه عبارتست از

$$x^2 + z^2 = c^2$$

راه حل دوم . خط D محل تلاقی دو صفحه $x - c = 0$ و $z = 0$ است. بنابراین ، هر

یک از مولدهای استوانه به صورت

$$\begin{cases} x = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

است. معادله خمی که این خط ها متکی بر آن به موازات D قرار دارند و

استوانه را می سازند عبارتست از

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = c^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

در نتیجه معادله استوانه عبارتست از

$$x^2 + z^2 = c^2$$

۲.۳ رویه های درجه دوم

اکنون که با رویه های استوانه ای و رویه های دوار آشنا شدیم ، رویه هایی

را معرفی می کنیم که تعمیم طبیعی خم های درجه دوم ، یعنی مقاطع

مخروطی هستند. این رویه ها ، رویه های درجه دوم نامیده می شوند.

❁ کره یک مثالی از یک رویه درجه دوم است.

۳.۲.۱ تعریف

نمودار معادله درجه دوم سه مجهولی

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad *$$

را که در آن $J, I, H, G, F, E, D, C, B, A$ اعداد ثابت و F, E, D, C, B, A همه

صفر نیستند، یک **رویه درجه دوم** می نامیم.

 به عبارت دیگر یک رویه درجه دوم مجموعه نقاطی چون (x, y, z) متعلق

به فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ است که در معادله * صدق می کنند.

۲.۲.۲ مثال

در معادله * قرار می دهیم

(الف) $A = B = C = 1 = -J$ و $D = E = F = G = H = I = 0$ و به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

مشاهده می کنیم که این معادله ، معادله کره به مرکز (۰ و ۰ و ۰) و شعاع ۱

است ، بنابراین می توان ادعا کرد که برخی از رویه های دوار رویه در جه

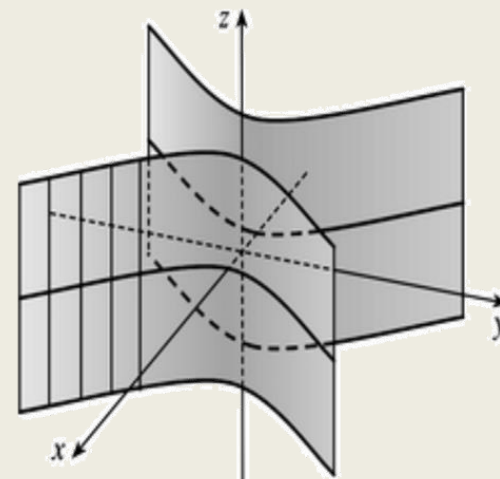
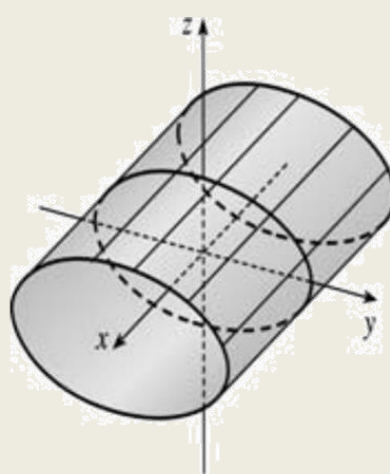
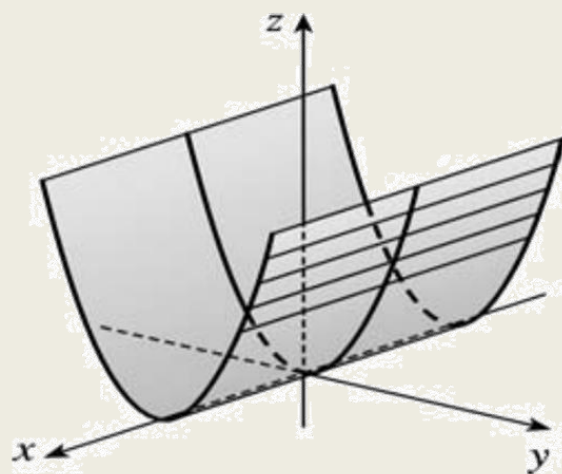
دوم نیز هستند.

(ب) با قرار دادن $A = B = 1$ و $I = -1$ و $C = D = E = F = G = H = J = 0$ و به دست می آوریم.

$$z^2 = x^2 + y^2$$

❖ دیدیم ، این معادله معرف سهمی وار دوار است . بنابراین سهمی وار دوار نمونه دیگری از یک رویه درجه دوم است.

در حالتی که ضرایب یکی از متغیرها، مثلاً ضریب متغیر z ، صفر باشد (ولی A و B هر دو با هم صفر نباشند)، رویه‌ی درجه‌ی دو $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + G = 0$ یک رویه‌ی استوانه‌ای درجه دو نامیده می‌شود



اصول كلي رسم نمودار رويه ها:

۱- محل برخورد با محور هاي مختصات را بدست آوريد.

مثلا با قرار دادن $y=z=0$.

۲- محل برخورد با صفحات مختصات را بدست آوريد.

مثلا با قرار دادن $z=0$.

۳- محل برخورد با صفحات موازي صفحات مختصات را بدست آوريد. (مجموعه های تراز)

حالت خاص: اگر ضرایب جملات حاصلضرب صفر شود

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

روش حل مسایل حالت خاص:

✓ عبارتهای درجه دوم در معادله را به مربع کامل تبدیل کرده و معادله را به یکی از صورتهای استاندارد (استاندارد) در می آوریم.

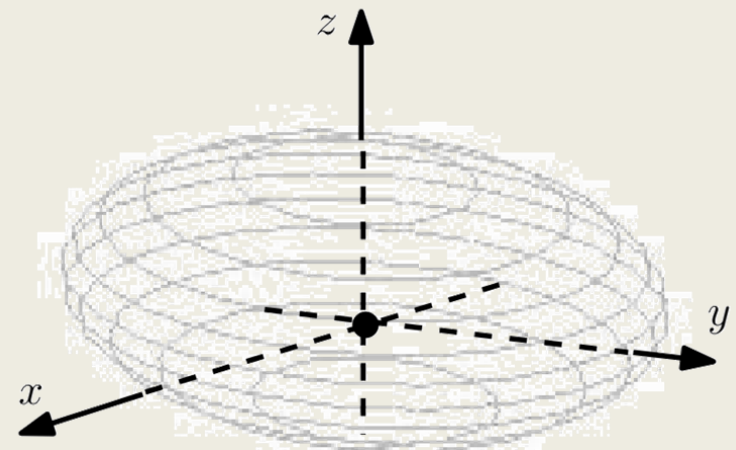
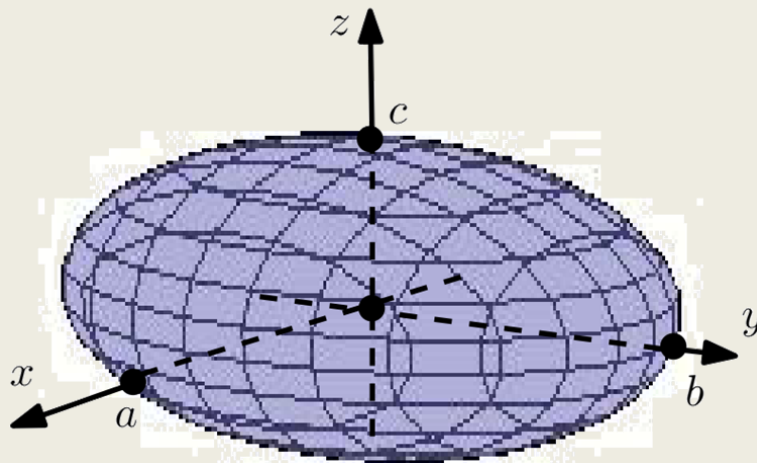
✓ معادلات استاندارد در ادامه توضیح داده خواهد شد.

بیضی گون:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

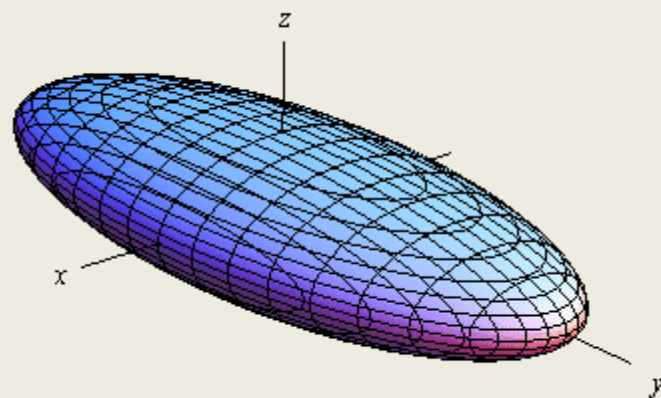
روش شناخت:

سه جمله مربع هم علامت سمت چپ و عدد يك سمت راست تساوي.



بیضی گون:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

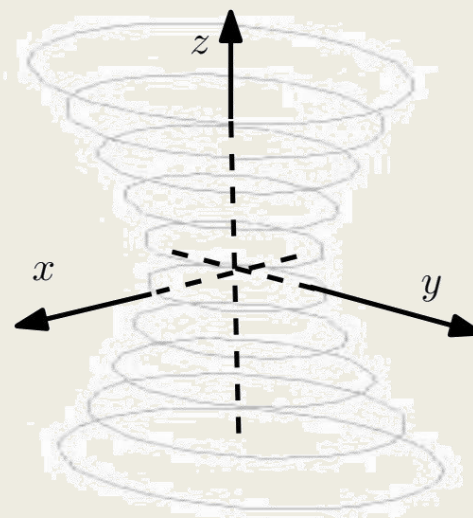
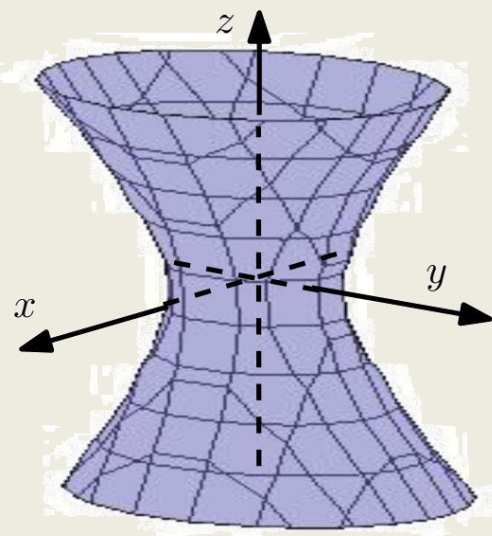


هذلولي گون يك پارچه:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

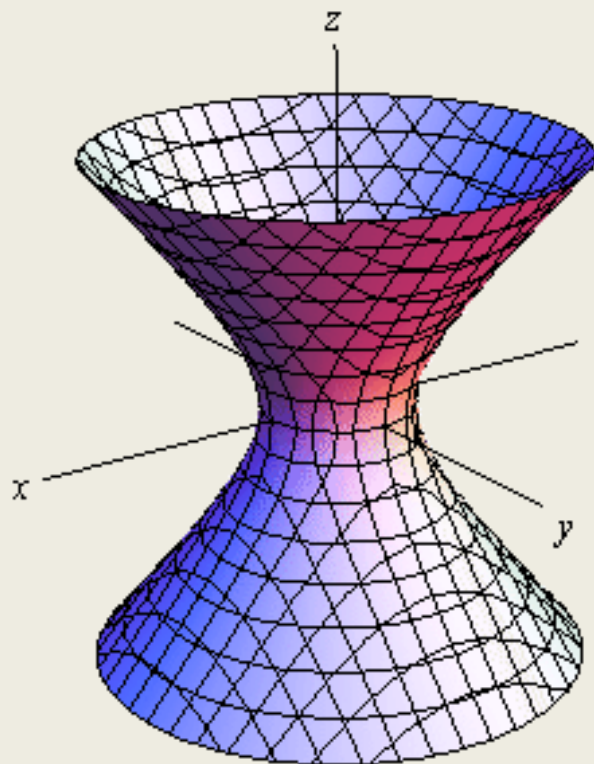
روش شناخت:

سه جمله مربع كه فقط يك جمله منفي (كه نشان دهنده محور شكل است) سمت چپ و عدد يك سمت راست تساوي.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

هذلولي گون يك پارچه:

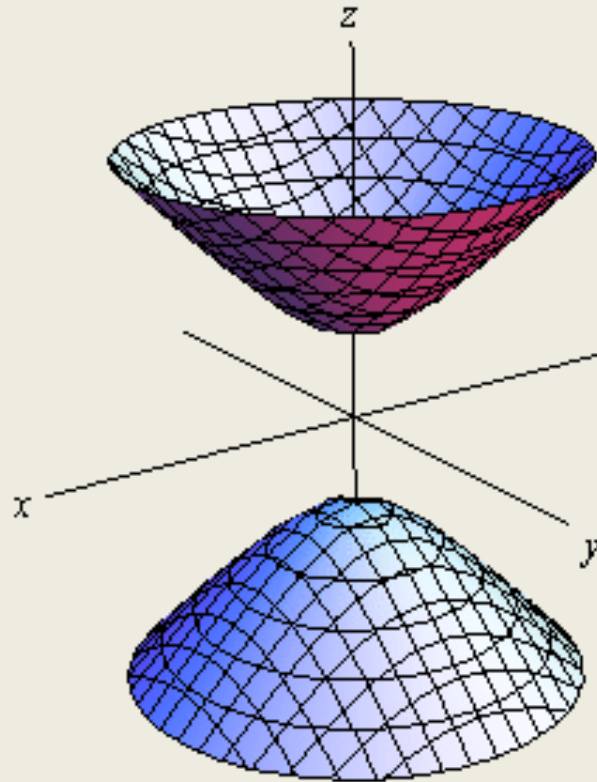


$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

هذلولي گون دو پارچه:

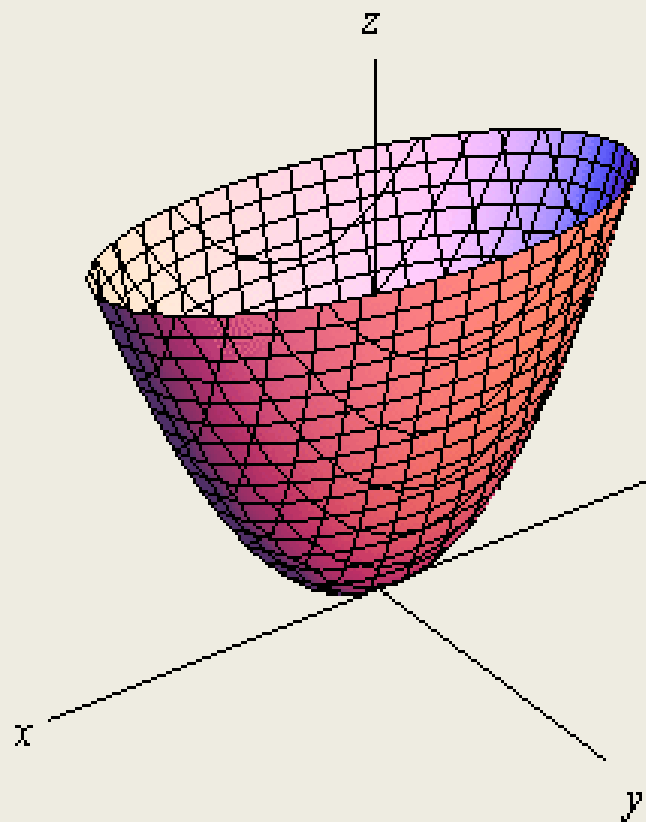
روش شناخت:

سه جمله مربع که دو جمله منفي سمت چپ (جمله مثبت نشان دهنده محور است) و عدد يك سمت راست تساوي



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

سه‌می گون بیضوی

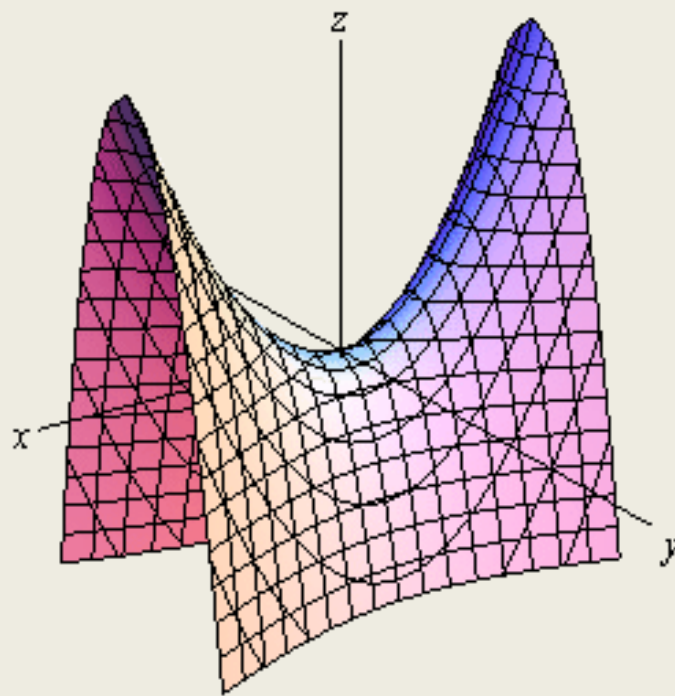


$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

سهمي گون هذلولوي (زين اسبي):

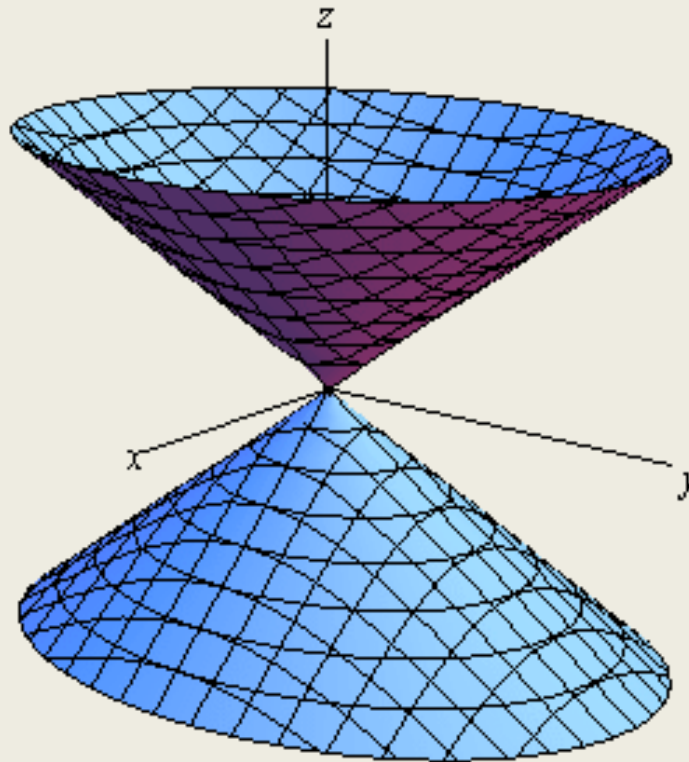
روش شناخت:

دو جمله مربع مختلف علامه در يك سمت ويك جمله درجه يك در سمت ديگر تساوي (جمله درجه يك نشان دهنده محور است)

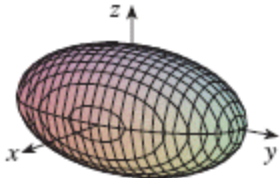
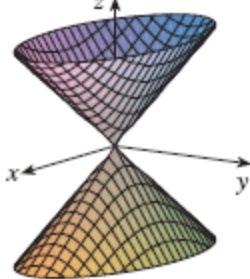
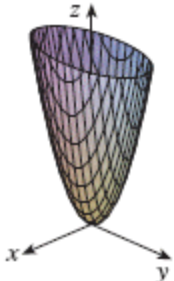
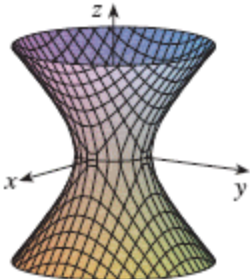
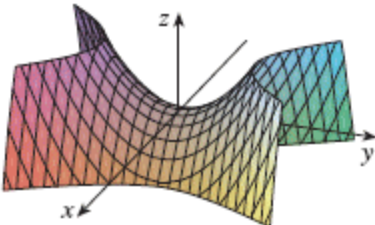
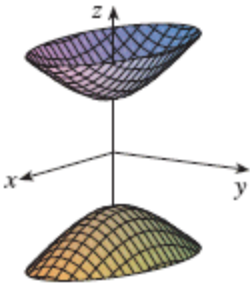


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

مخروط بیضوی:



توجه داشته باشید که جهت مخروط همواره به سمت متغیر با ضریب منفی (متغیر سمت چپ) در رابطه فوق است

معادله	شکل رویه	معادله	شکل رویه
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ اگر a, b, c با هم برابر باشند رابطه فوق نشان دهنده کره خواهد بود.	بیضی گون 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ متغیر قرار گرفته در سمت چپ رابطه فوق نشان دهنده جهت مخروط است.	مخروط 
$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ متغیری که توان آن یک است جهت محور سهمی را نشان می‌دهد.	سهمی گون بیضوی 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ متغیری که علامت آن منفی است جهت محور هذلولی را نشان می‌دهد.	هذلولی یک پارچه 
$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ شکل سمت چپ حالتی را نشان می‌دهد که c در رابطه فوق منفی است.	سهمی هذلولی گون 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	هذلولی دو پارچه 

۱۴.۲.۳ مثال

رویه معرفی شده توسط معادله درجه دوم زیر را شناسایی کنید.

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 3x + 6y + 12z = 24 + \frac{7}{8}$$

حل:

برای این منظور نخست قسمت درجه دوم طرف چپ معادله فوق یعنی

$$P(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$$

را درجه دوم نظر می گیریم. $P(x, y, z)$ یک صورت درجه دوم سه متغیره است.

صورت ماتریسی $P(x, y, z)$ عبارتست از

$$P(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ویژه مقدارهای ماتریس ضرایب صورت درجه دوم مذکور عبارت اند از

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$$

ویژه بردارهای یکه متناظر با این ویژه مقدارها عبارت اند از

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اکنون تغییر مختصات

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

*

$P(x,y,z)$ را به صورت زیر در می آورد

$$P(x, y, z) = x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2$$

x' , y' , z'

قسمت درجه اول معادله داده شده را نیز با استفاده * برحسب

می نویسیم و بدست می آوریم

$$3x + 6y + 12z = -4x' + 13y' - 2z'$$

در نتیجه معادله داده شده برحسب z' به صورت زیر می آید.

$$(x' - 2)^2 - 2(y' - \frac{13}{4})^2 - 4(z' - \frac{1}{4})^2 = 8$$

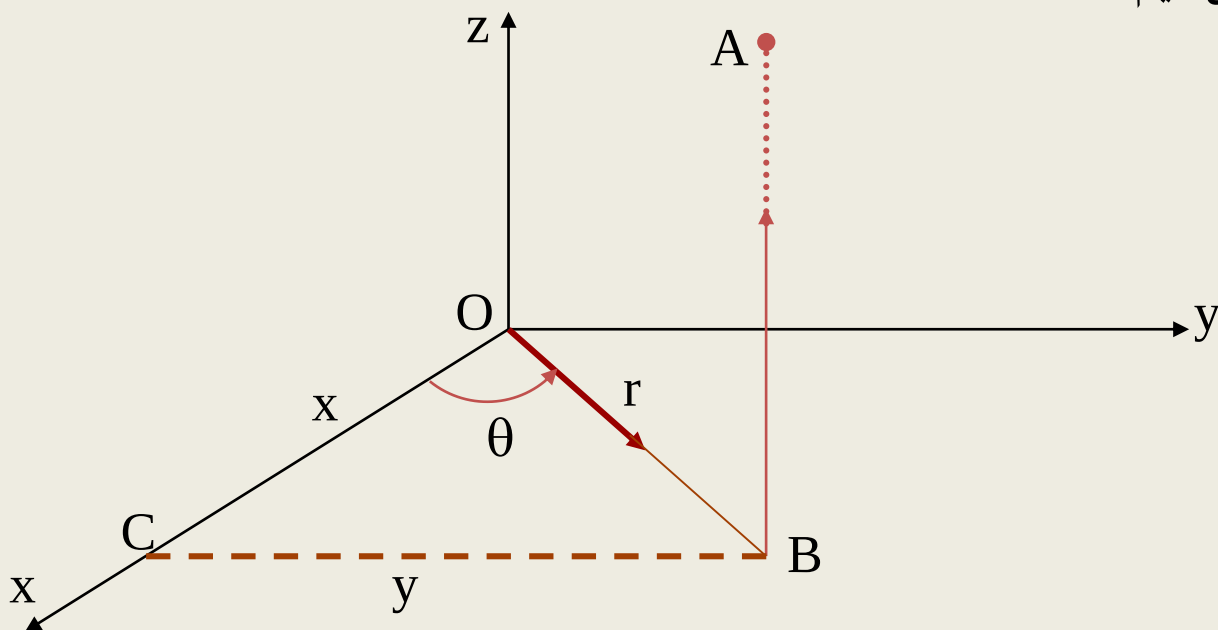
مشاهده می کنیم که این معادله ، معرف یک هذلی وار یک پارچه است. 

۳.۳ مختصات استوانه‌ای و کروی

هدف این قسمت تعمیم مختصات قطبی به فضای سه بعدی است. *

بنابراین دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی را معرفی و برخی ویژگی‌های

آنها را بررسی می‌کنیم.



**

۳.۳.۱ تعریف

اگر $A(x,y,z)$ نقطه ای در دستگاه دکارتی xyz و B تصویر قائم آن بر صفحه xy باشد فرض کنید و اگر (r, θ) مختصات قطبی B ، با محور قطبی Ox و قطب O باشد ، آن گاه (r, θ) مختصات استوانه ای نقطه A می نامیم.

دامنه تغییرات r و θ را به ترتیب به بازه های $[0, \infty)$ و $(-\pi, \pi]$ می گیریم.

✱ مشاهده می کنیم که با این محدودیت ها به هر نقطه در فضا فقط یک دسته مختصات استوانه ای نسبت داده می شود.

۲.۳.۳ رابطه مختصات دکارتی و استوانه ای

فرض می کنیم (x,y,z) و (r,θ,z) مختصات دکارتی و استوانه ای

نقطه A باشند.

در مثلث قائم الزویه OCB (قائم در C) شکل ** داریم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

به علاوه بنا به تعریف داریم

$$z = z \quad (2)$$

در نتیجه اگر مختصات استوانه ای (r,θ,z) شده باشند

از روابط (۱) و (۲) مختصات دکارتی A به دست می آیند.

برعکس ، باتوجه به شرایط و $r \geq 0$ از روابط (r, θ) نتیجه می شود که

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad x \neq 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad x = 0, \quad y \neq 0$$

بنا براین اگر مختصات دکارتی (x, y, z) نقطه A داده شده باشد آن گاه مختصات

استوانه‌ای آن عبارت خواهد بود از

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y \neq 0 \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \end{cases} \quad z = z$$

۳.۳.۳ مثال

نقطه $(\sqrt{2}, 1)$ در دستگاه مختصات دکارتی داده شده است ، مختصات

استوانه‌ای آن را تعیین می‌کنیم.

حل:

فرض می‌کنیم که (r, θ) استوانه‌ای A باشد ، داریم

$$z = \sqrt{2} \quad , \quad r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad ,$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

معرفي بعضي شكلها در مختصات استوانه اي:

$R=0$ محور Z است.

$$r \geq 0$$

$\theta = \theta_0$ مجموعه نيم صفحه شامل محور Z و نيم خط

$y^2 = c^2$ معادله استوانه در مختصات دکارتی
 $R=c$ معادله همان استوانه در مختصات استوانه اي

$Z=c$ معادله يك صفحه كه محور Z بر آن عمود است

۳.۳.۴ استوانه

فرض کنید C عددی ثابت و نامنفی باشد. در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$A = \{(r, \theta, z) \mid r = c\} \quad \text{مجموعه}$$

استوانه‌ای است که خم هادی آن

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

و مولد آن موازی با محور Z است. معادله این استوانه در دستگاه مختصات

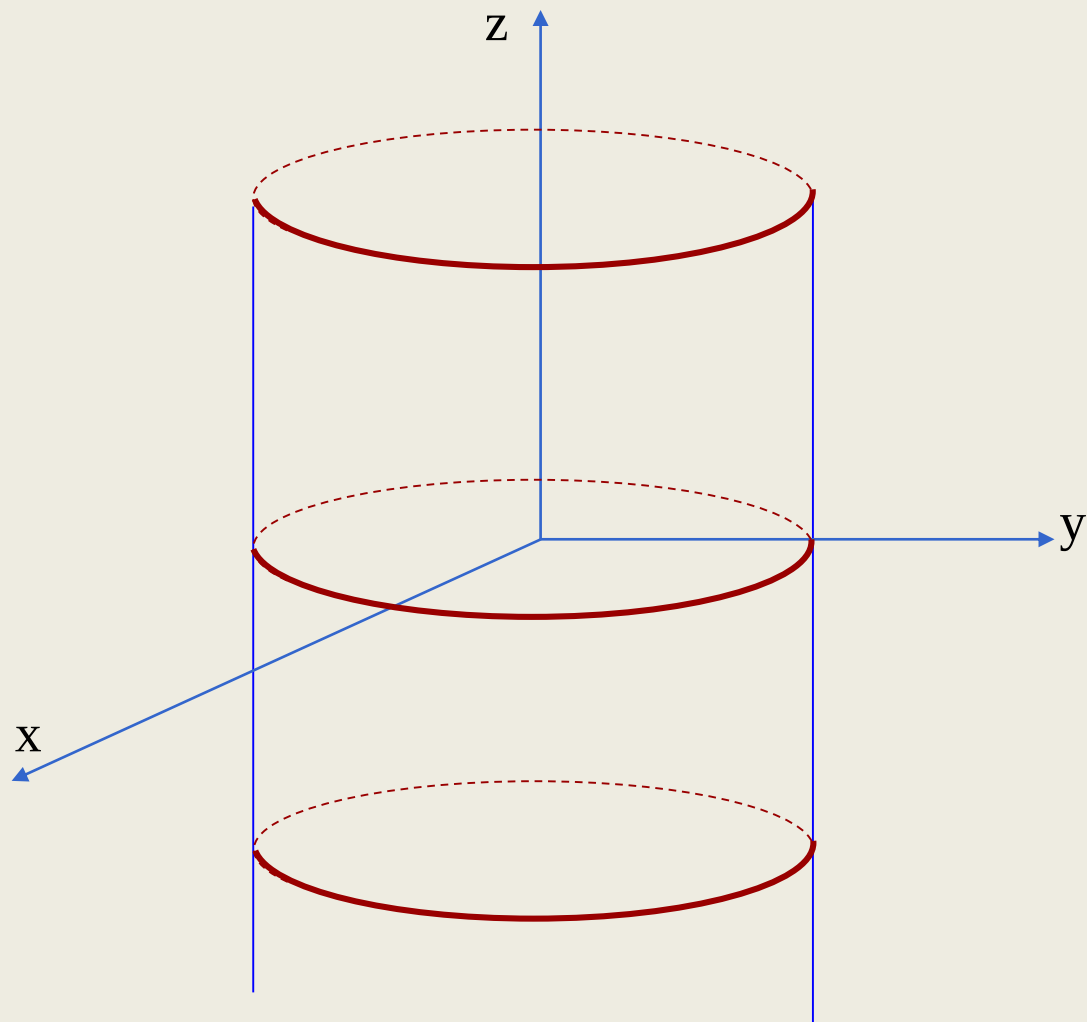
استوانه‌ای

$$r = c$$

و در دستگاه مختصات دکارتی

$$x^2 + y^2 = c^2$$

است.



$\mathbf{r} = \mathbf{c}$ استوانه

۵.۳.۳ نیم صفحه

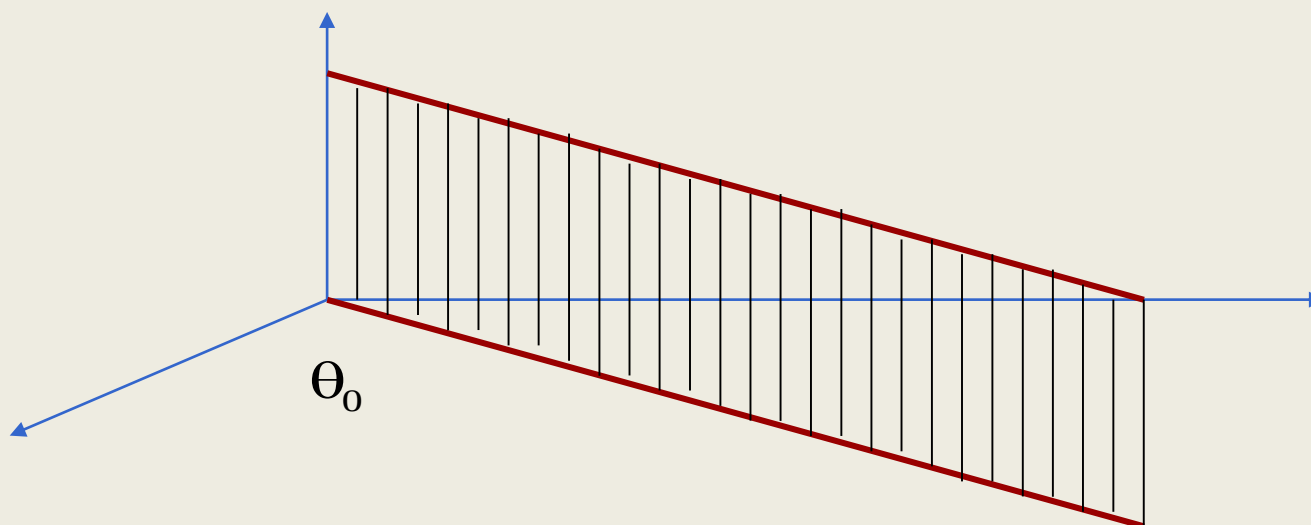
فرض می کنیم θ عددی $[\pi, \pi]$ باشد. در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$B = \{(r, \theta, z) \mid \theta = \theta_0\}$$

مجموعه

یک نیم صفحه است. بسته به ازای این نیم صفحه عبارت است از تمام نقاط

صفحه XOY که شامل نیمه نامنفی محور X است.



۶.۳.۳ مثال

نمودار معادله $2(1 + \cos \theta)$ دستگاه مختصات استوانه ای رسم کنید.

حل:

این نمودار عبارت است از مجموعه نقاط

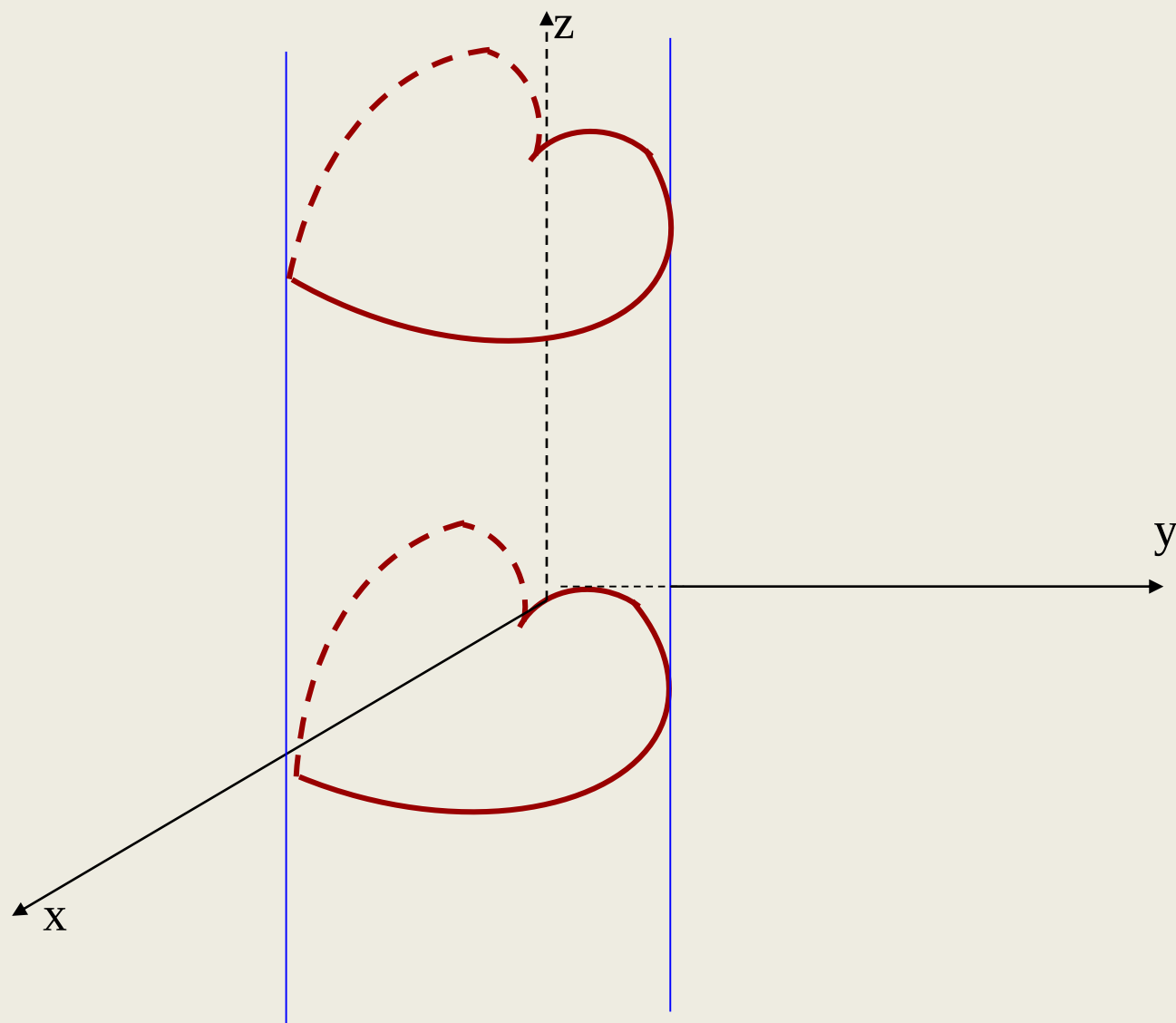
$$A = \{(r, \theta, z) \mid r = 2(1 + \cos \theta)\}$$

بنابراین مختص z عددی است اختیاری .

به ازای $z = 0$ ، $2(1 + \cos \theta)$ در صفحه xoy است. بنابراین ، مجموعه

A_0 یا به بیان دیگر معادله $2(1 + \cos \theta)$ استوانه است که هادی آن دایره

مذکور و مولد آن موازی با محور z است .



$$r = 2(1 + \cos \theta)$$

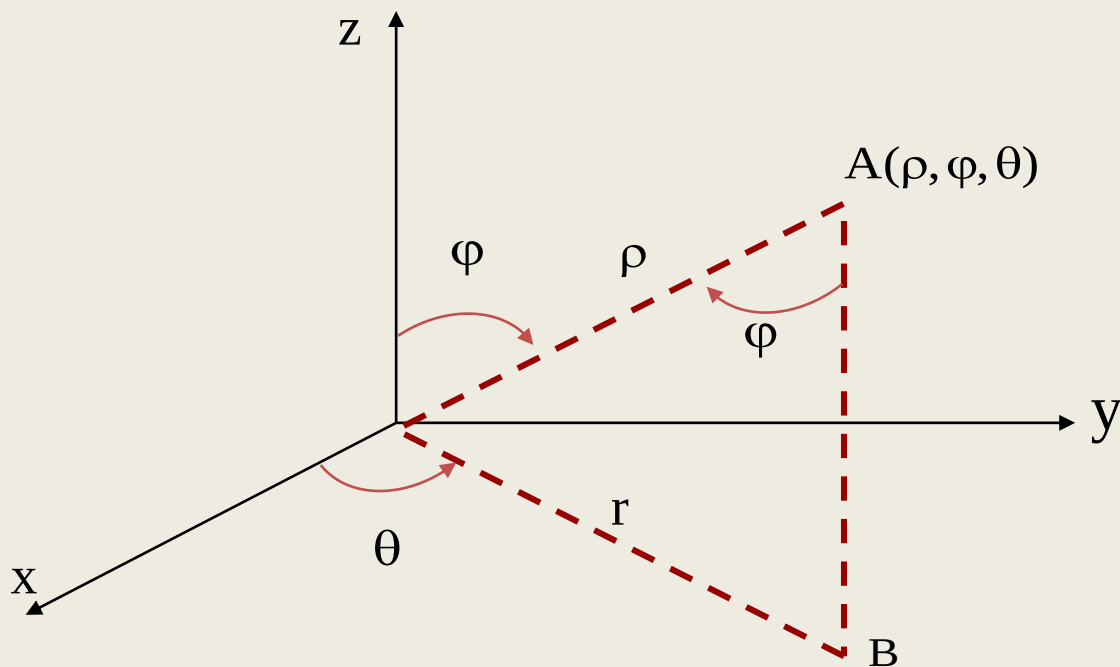
قسمتی از نمودار معادله

۳.۳.۷ تعریف

سه تایی مرتب (ρ, φ, θ) را **مختصات کروی** نقطه A می نامیم.

توجه کنید که چون θ_0 نصف صفحه و محور OZ واقع در آن محور

قطبی است، دامنه تغییرات φ عبارت از $[0, \pi]$ یعنی $0 \leq \varphi \leq \pi$



اگر (x, y, z) مختصات دکارتی نقطه A باشد. آن گاه مختصات کروی آن (ρ, φ, θ) از روابط زیر به دست می آیند.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

برعکس اگر (ρ, φ, θ) کروی نقطه A با مختصات دکارتی (x, y, z)

باشد آن گاه با توجه به شکل اسلاید بعدی و روابط فوق داریم

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$x = OB \cos \theta = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = OB \sin \theta = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

معرفي بعضي شكلها در مختصات كروي:

كره اي به شعاع Γ در مختصات دكارتی

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow \rho = r$$

كروي

نمودار نیم صفحه اي شامل محور Z

$$\theta = \theta_0$$

نمودار نیم مخروط

$$\varphi = \varphi_0$$

۹.۳.۳ مثال

نقطه $A(-2, 1, -3)$ در دستگاه مختصات دکارتی داده شده است. مختصات

کروی این نقطه را پیدا می کنیم.

حل:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

داریم

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{z}{\rho} = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{14}} \approx \cos^{-1}(0/80002) \approx 36^\circ 57'$$

در مورد θ داریم

$$\cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0/8944$$

ولذا داریم

$$\theta \approx 180^\circ - 26^\circ 36' = 153^\circ 24'$$

۳.۳.۱۰

الف) معادله کره : می دانیم که

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

معادله کره به مرکز O و شعاع r است این معادله در دستگاه مختصات کروی

$$\rho = r$$

به صورت

نوشته می شود.

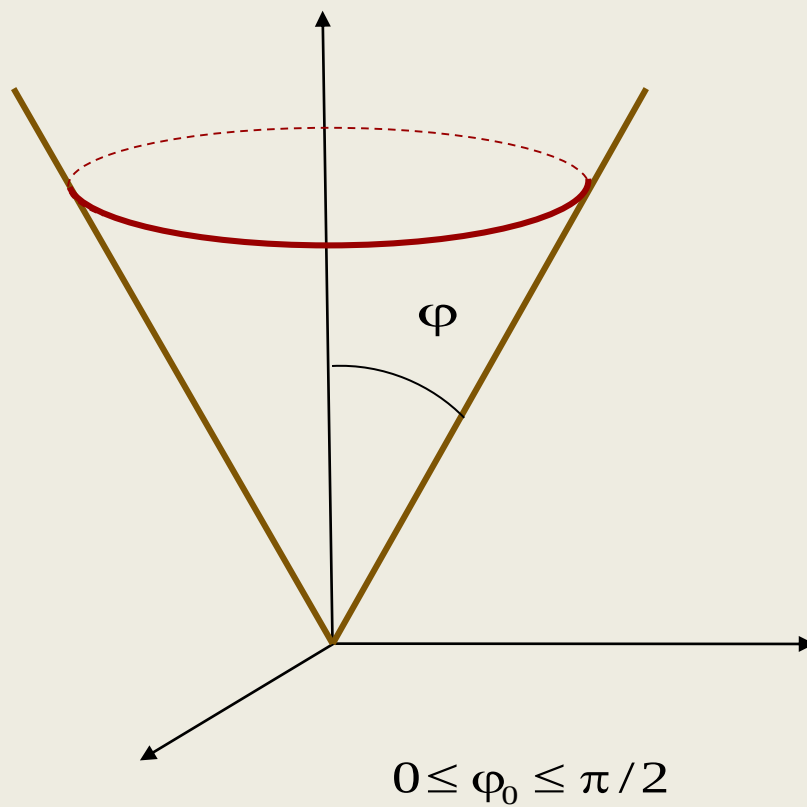
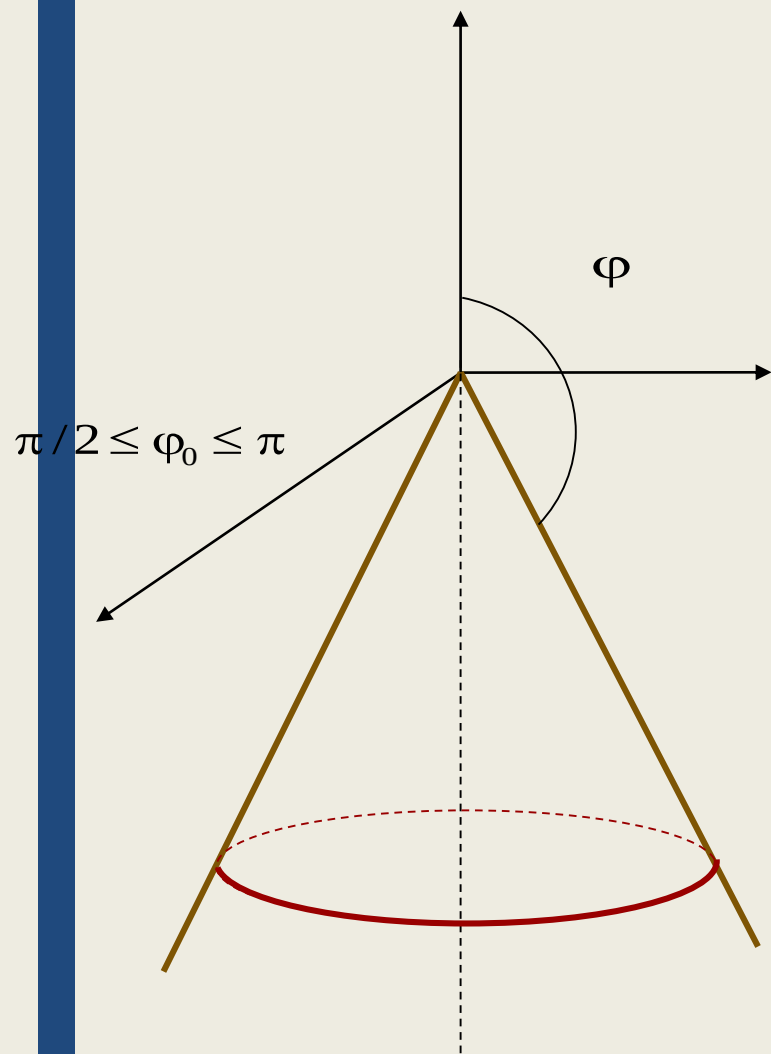
θ_0

ب) معادله نیم صفحه : همانند دستگاه مختصات استوانه ای اگر

$\theta_0 \leq \theta \leq \pi$ یک θ ثابت باشد ، معرفی یک θ نیم صفحه است.

پ) معادله مخروط : اگر $(\theta_0, \pi) \in \Omega$ باشد ، می خواهیم

نمودار معادله φ_0 را پیدا کنیم.



۱۱.۳.۳ مثال

$$\rho = 6 \sin \phi \sin \theta + 3 \cos \theta$$

صورت دکارتی معادله کروی

حل:

برای این کار دو طرف معادله داده شده را در ضرب می‌کنیم تا به دست

$$\rho^2 = 6\rho \sin \phi \sin \theta + 3\rho \cos \theta \quad \text{آوریم.}$$

اکنون با توجه به روابط تعریف شده داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6y + 3z$$

و یا

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-\frac{3}{2})^2 = \frac{45}{4}$$

بنابراین معادله داده شده، معادله کره به مرکز $(0, 1, \frac{3}{2})$ و شعاع $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ است.