

ریاضی عمومی ۲

فصل دوم

توابع برداری و خم های فضایی

فصل دوم

توابع برداری یک متغیره

هدفهای کلی

هدفهای کلی این فصل را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

۱. آشنا کردن دانشجو با توابع برداری یک متغیره ، حساب دیفرانسیل و انتگرال

و کاربردهای این توابع

۲. مطالعه حرکت در صفحه و فضا با استفاده از ویژگی های توابع برداری

۳. به کاربرستن مطالبی از فصل های گذشته در این فصل .

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند

ا- حد ، مشتق و انتگرال توابع برداری یک متغیره را محاسبه کند.

ب- خم و مسیر را تعریف و معادله های پارامتری برخی از مسیر ها را پیدا کند

ج- خم هموار را بشناسد ، طول خم داده شده را محاسبه و در صورت امکان خم

را توسط طول خم پارامتری کند.

ت- برخی خم های معروف از جمله سیکلوئید (چرخزاد) و... را بشناسد و طول و

انحنای آنها را محاسبه کند.

ث- مفاهیم مربوط به حرکت در یک صفحه ، از جمله سرعت ، شتاب ، تندی ،

مولفه های قائم و مماسی شتاب را محاسبه کند.

ج- دستگاه مختصات متحرک TN را به ازای هر مسیر داده شده به دست آورد

و از آن برای محاسبه انحنای مسیر ، و معادله دایره انحنای استفاده کند.

چ- فرمول های مربوط به انحنای مسیر را بداند.

ح- دستگاه مختصات فضایی TNB را در هر نقطه از مسیر داده شده به دست

آورد و با استفاده از آن انحنای و تاب مسیر های فضایی را پیدا کند.

خ) فرمول های مربوط به تاب را به دست آورد و مسطح یا نامسطح بودن خم را تشخیص دهد.

د) صفحه قائم و صفحه بوسان و دایره و صفحه رکتیفایر را در مورد هر خم داده شده به دست آورد.

توابع برداری یک متغیره

۱.۱.۲ تعریف

تابع $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ که از آن $n = 2$ و $A \subseteq \mathbb{R}$ را یک تابع برداری یک متغیره

مجموعه A را دامنه و مجموعه $\mathbb{R}^n$ را برد این تابع می نامیم.

به ازای $n = 2$ و $f(t)$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

که در آن $f_1: A \rightarrow \mathbb{R}$ توابع حقیقی روی A هستند. از طرف

دیگر $f(t)$ معرف نقطه ای چون $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ داریم:

$$y = f_2(t), \quad x = f_1(t) \quad (1)$$

معادله های (۱) را **معادله پارامتری** f نگاره ی f یعنی مجموعه $f(A)$ ، و توابع

$f_1 : A \rightarrow R$ مولفه های f و متغیر t را یک پارامتر می نامیم.

به همین ترتیب به ازای $n = 3$ ، اگر توابع حقیقی و $A \rightarrow R^2$ چنانچه

باشند که

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad t \in A$$

آنگاه این توابع را **مولفه های f** و معادله های

$$x = f_1(t) \quad , \quad y = f_2(t) \quad , \quad z = f_3(t)$$

را **معادله های پارامتری** $f(A)$ و متغیر t را یک پارامتر می نامیم.

۲.۱.۲ مثال

به ازای $A = [0,1)$ تابع $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ تعریف

$$f(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$$

دارای مولفه های

$$f_1(t) = \sin 2\pi t, \quad f_2(t) = \cos 2\pi t \quad t \in A$$

و مجموعه $f(A)$ دارای معادله های پارامتری

$$x = \sin 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t \quad *$$

است.

توجه کنید که $f(A)$ دایره به مرکز $O(0,0)$ و شعاع $r=1$ ، یعنی دایره واحد

است. در واقع اگر $(x,y) \in f(A)$ نقطه دلخواهی متعلق به $f(A)$ باشد، آنگاه

$$x^2 + y^2 = (\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t) = 1$$

یعنی (x,y) متعلق به دایره واحد است ، برعکس هر نقطه دلخواه روی دایره واحد

را فقط به یک صورت می توان توسط معادله های $*$ با $t \in A$ نشان داد.

توجه کنید که نمودار f ، یعنی مجموعه

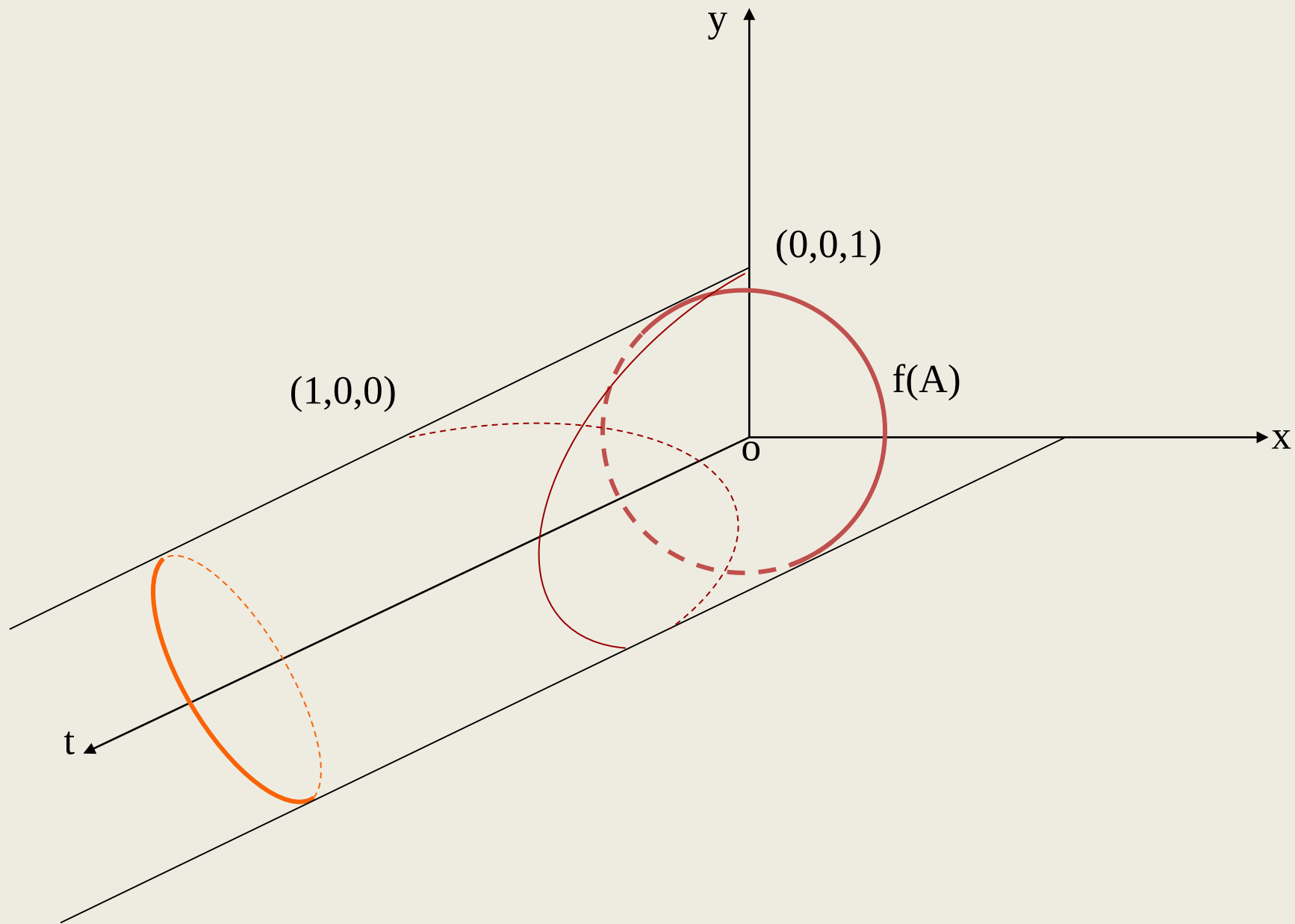
$$G = \{(t, f(t)) \mid t \in A\} = \{(t, \sin 2\pi t, \cos 2\pi t) \mid t \in A\}$$

با نگاره f متفاوت است. در شکل اسلاید بعدی مجموعه های $f(A)$ و G را در

دستگاه مختصات txy نشان داده ایم. توجه کنید که G روی استوانه

$$x^2 + y^2 = 1$$

قرار دارد.



۳. ۱. ۲ مثال

تابع $R^3 \rightarrow R$ تعریف

$$f(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$$

دارای مولفه های

$$f_1(t) = 2\cos t, \quad f_2(t) = 2\sin t, \quad f_3(t) = 3t$$

است. معادله های پارامتری $f(R)$ عبارت اند از:

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 3t$$

توجه کنید که در این حالت نمودار f یک زیر مجموعه از R^4 است و لذا قابل

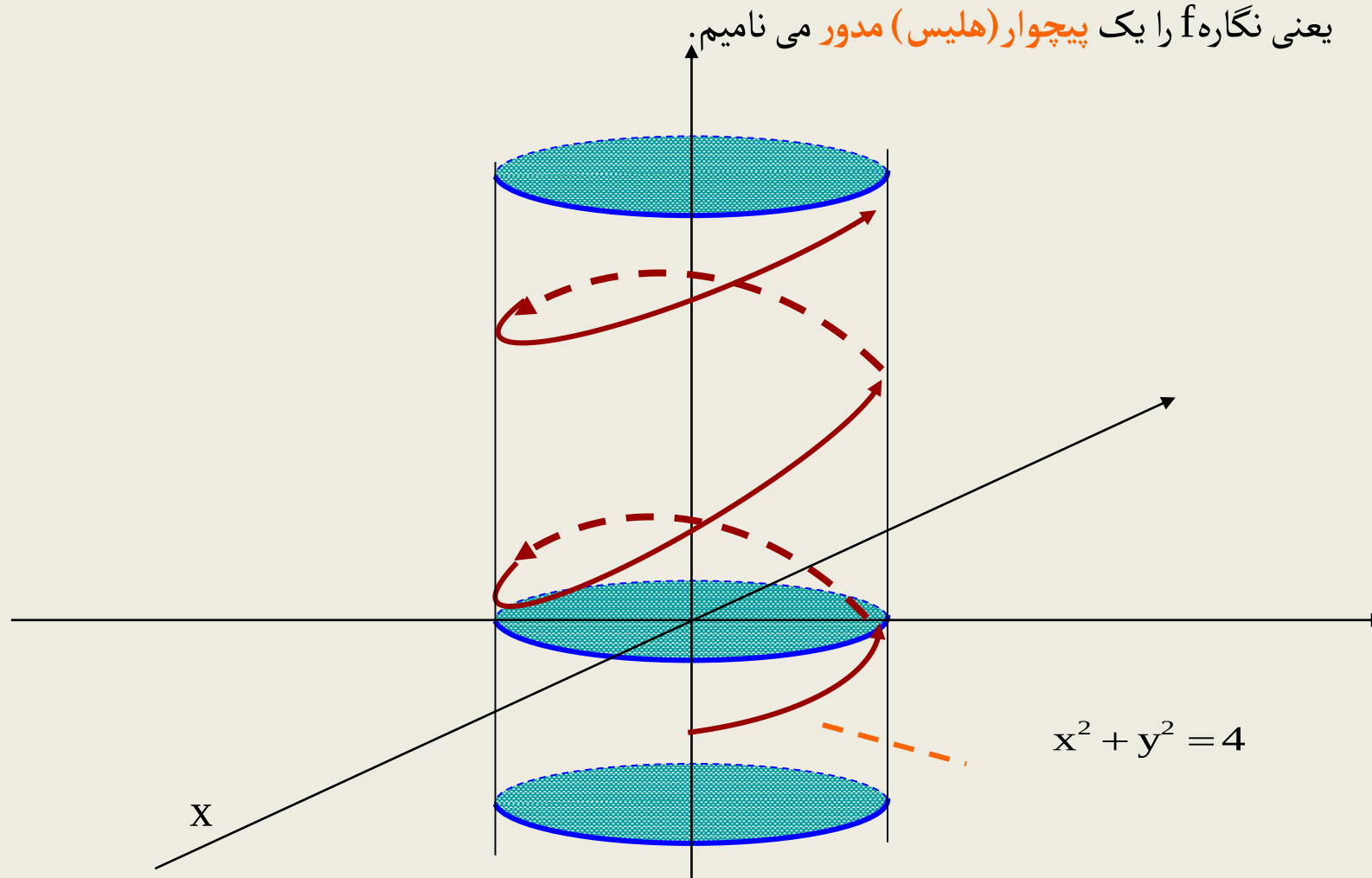
ترسیم نیست. ولی $f(R)$ زیر مجموعه ای از R^3 است. داریم

$$f(R) = \{(x, y, z) \mid x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t\}$$

مشاهده می کنیم که به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ، بنابر این هر نقطه $x^2 + y^2 = 4$

$(x, y, z) \in f(R)$ و می توانه قائم 4 واقع است. مجموعه $f(R)$ ،

یعنی نگاره f را یک پیچوار (هلپس) مدور می نامیم.



۲. حد و پیوستگی توابع برداری

۲.۲.۱ تعریف

می گوئیم تابع برداری $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$

$t = t_0$ $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ نقطه

دارای حد $(L = (l_1, l_2, l_3))$ ، $L = (l_1, l_2)$ اگر

$$\left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = l_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = l_2, \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = l_3 \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = l_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = l_2$$

✱ به عبارت دیگر تابع f در نقطه t_0 اگر و تنها اگر هر یک از

مولفه های آن در این نقطه حد داشته باشد.

۲.۲.۲ تعریف

می گوئیم تابع $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ یا $n = 3$ در نقطه $t = a \in A$

پیوسته است اگر داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

f را روی A پیوسته می نامیم اگر در هر یک از نقاط A پیوسته باشد.

با توجه به تعریف مشاهده می کنیم که تابع f در نقطه $t = a$ پیوسته است اگر

و تنها اگر هر یک از مولفه های f در a پیوسته باشد. به عبارت دیگر اگر

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad \text{یا} \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

آنگاه f در a پیوسته است اگر و تنها اگر توابع f_1, f_2, f_3 پیوسته باشند.

۳.۲.۲ مثال

الف) تابع $f(t) = (\sqrt{t^2 + 1} \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ پیوسته است.

حل:

زیرا همه مولفه های f در این نقطه پیوسته هستند. در واقع داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{1} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0 = \sin 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$$

ب) تابع $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \ln(2+t) \right)$, $t > -2$, $t \neq 0$ پیوسته نیست.

حل:

زیرا تابع $f_1(t) = \frac{\sin t}{t}$ در نقطه $t=0$ تعریف نشده است. با وجود این داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = (1, \ln 2)$$

۴.۲.۲ تعریف

اگر $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $n=2$ یا $n=3$ تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد، آنگاه f

را یک **خم** در $\mathbb{R}^2$ می نامیم. نگاره f یعنی مجموعه را **اثر** یا **مسیر** خم (و

گاه خود خم) و معادلات پارامتری $f[a,b]$ را **معادلات پارامتری** خم می نامیم.

۵.۲.۲ مثال

تابع $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ تعریف:

$$f(t) = (|t|, t^2)$$

روی $[-1, 1]$ پیوسته و لذا یک خم در $\mathbb{R}^2$ است. معادلات پارامتری این خم

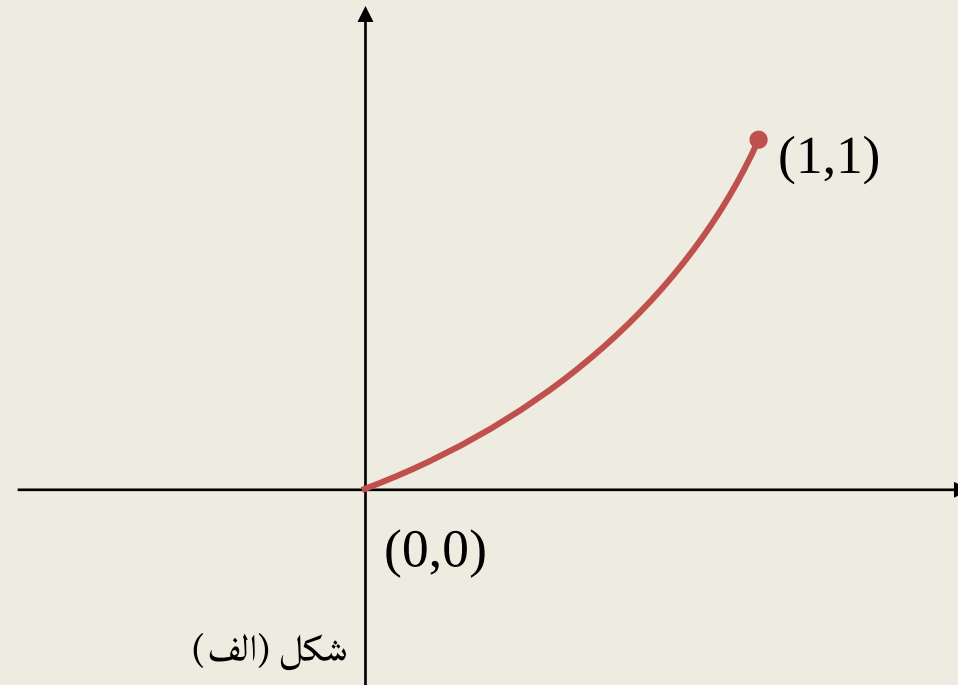
عبارت اند از:

$$x = |t|, \quad y = t^2, \quad t \in [-1,1]$$

اثر این خم یا نگاره f عبارت است از:

$$\begin{aligned} f[-1,1] &= \{f(t) | t \in [-1,1]\} = \{(|t|, t^2) | t \in [-1,1]\} \\ &= \{(x, y) | x = |t|, y = t^2, t \in [-1,1]\} \\ &= \{(x, x) | 0 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

در شکل زیر $f[-1,1]$ را رسم کرده ایم.



توجه کنید که وقتی t از -۱ تا ۰ افزایش می یابد ، نقطه (x,y) اثر خم f را از

$(1, 1)$ تا $(۰,۰)$ یک بار می پیماید. همچنین وقتی t از ۰ تا ۱ افزایش یابد نقطه

(x,y) اثر خم f را از $(0,0)$ تا $(1,1)$ مجدداً طی می کنند. بنابراین هریک از دسته

معادله های

$$x = -t , \quad y = t^2 \quad t \in [-1,0] \quad *$$

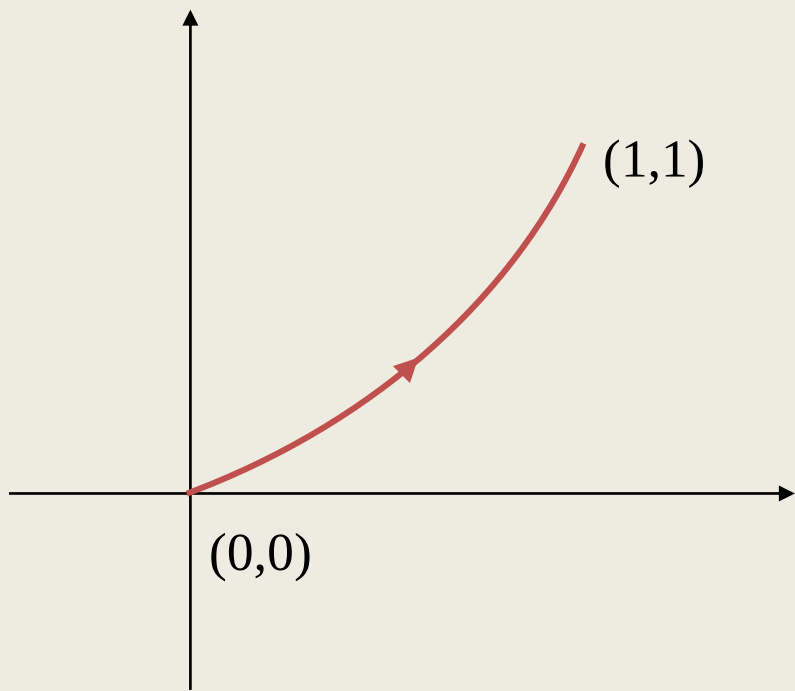
$$x = t , \quad y = t^2 \quad t \in [0,1] \quad **$$

معادلات پارامتری خم واحدی هستند. در شکل (ب) خم مذکور با معادلات

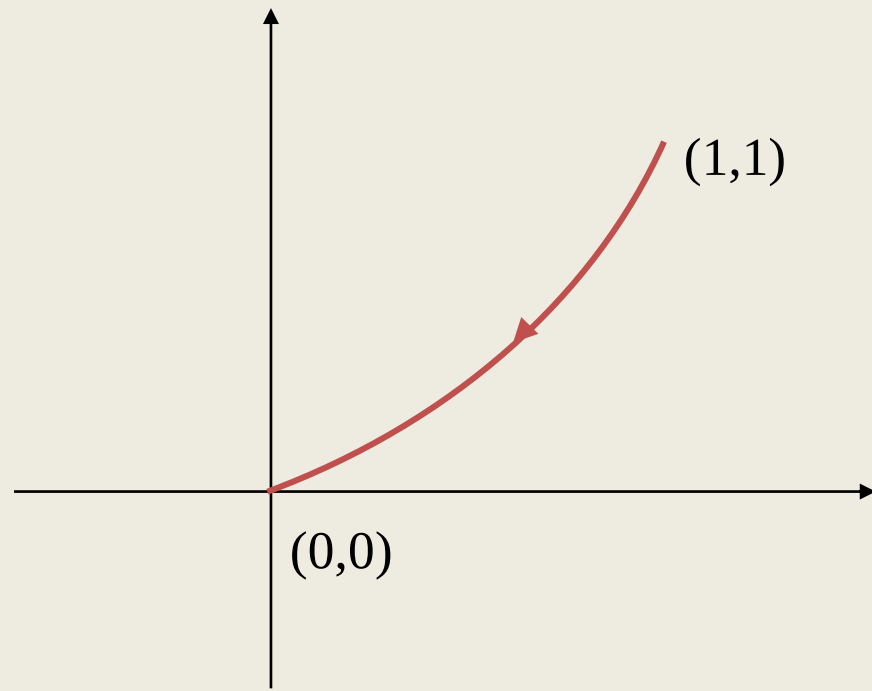
پارامتری $*$ و در شکل (پ) خم مذکور با معادلات پارامتری $**$ نشان داده

شده اند. در این شکل ها پیکان ها جهت حرکت نقطه (x,y) روی خم را نشان

می دهند.



شکل (ب)



شکل (پ)

۶.۲.۲ مثال

$$f(t) = (\cosh 2t, \sinh 2t, t) \quad t \in \mathbb{R}$$

اثر خم

را مشخص می کنیم.

حل:

بنا بر تعریف ، اثر f عبارتست از:

$$f(\mathbb{R}) = \{ (\cosh 2t, \sinh 2t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

چون

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 2t - \sinh^2 2t = 1$$

پس $f(A)$ روی استوانه $x^2 - y^2 = 1$ قرار دارد. چون به ازای هر t ، $x = \cosh 2t > 0$

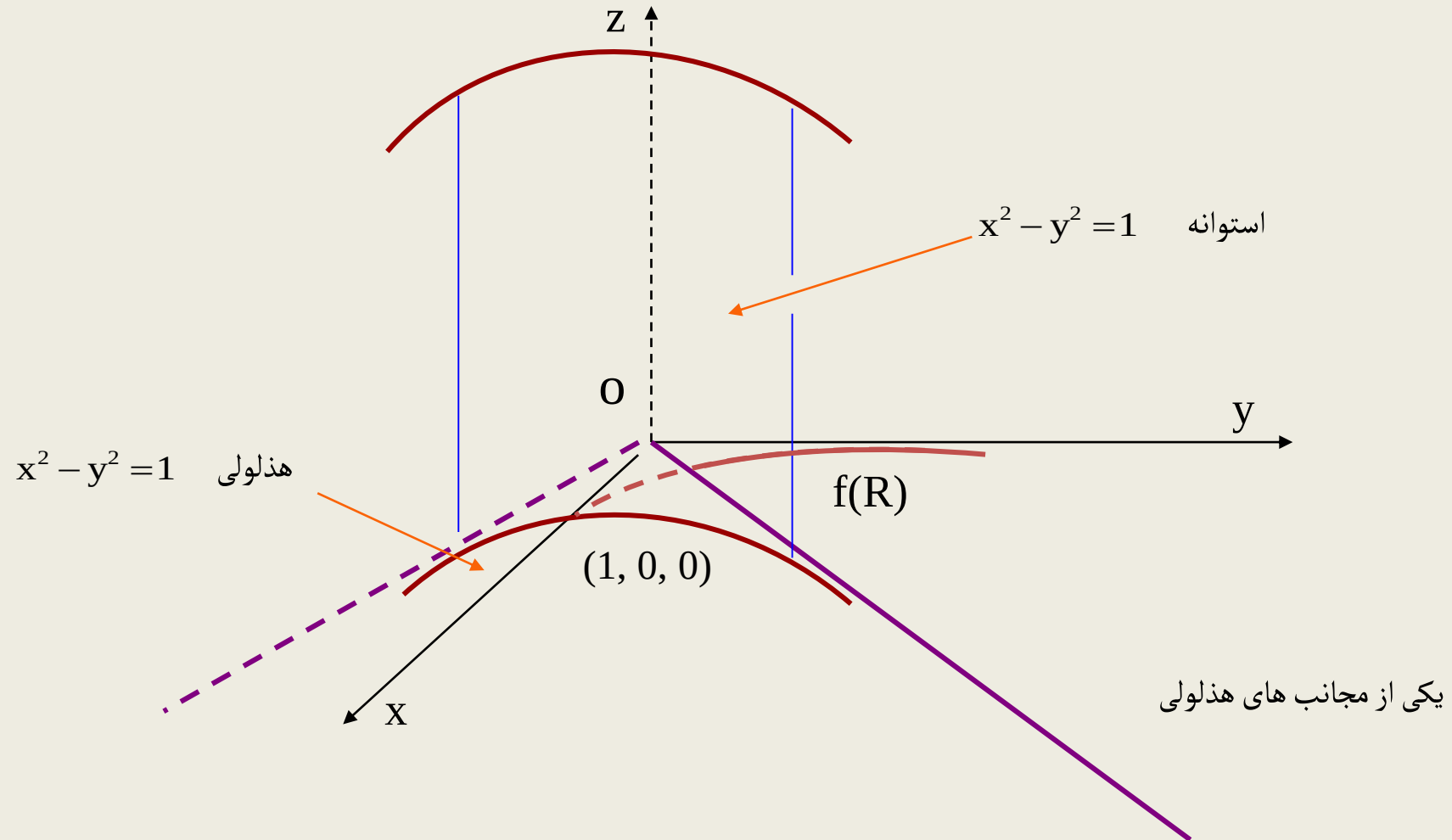
پس برای ترسیم استوانه مذکور تنها شاخه ای از هذلولی

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

را در نظر می گیریم که مختص اول هر نقطه آن مثبت است.

$$x^2 - y^2 = 1$$

در شکل زیر قسمتی از $f(R)$ ، اثر f را روی قسمتی استوانه کرده ایم.



۲.۲.۷ مثال

قسمتی از خم فصل مشترک رویه های

$$x^2 + y^2 = 2x$$

(الف)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

(ب)

را که در یک هشتم اول دستگاه مختصات XYZ است رسم می کنیم.

حل:

بنابر تعریف یک هشتم اول دستگاه مختصات XYZ مجموعه نقاط (x, y, z) است

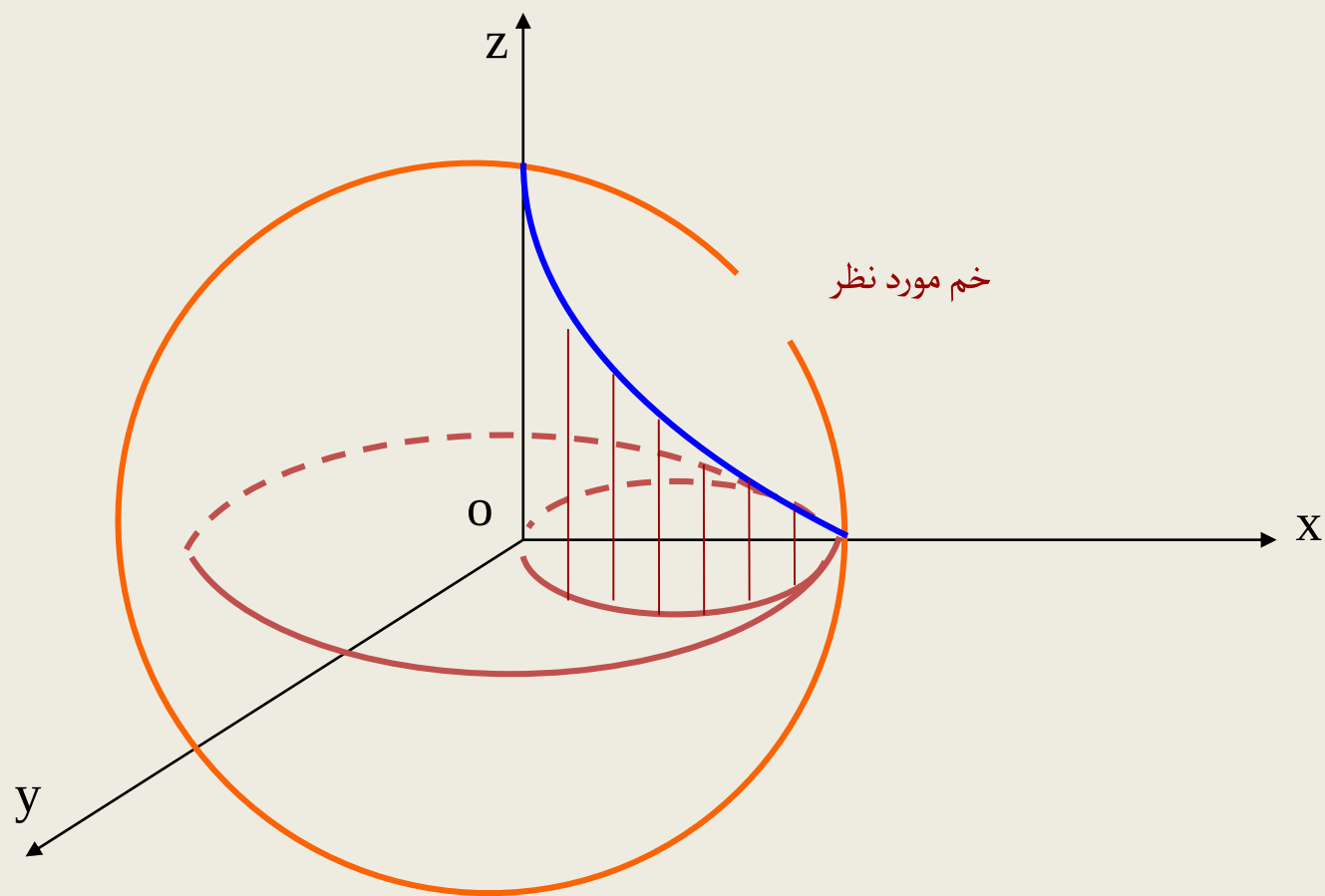
که $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ و در نظر از تلاقی استوانه

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

با کره زیر به دست می آید.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

در شکل زیر این خم را با تعویض نقش محورهای X و Y رسم کرده ایم.



۸.۲.۲ مثال

دایره ای به شعاع a در صفحه XOY روی محور X بدون این که بلغزد می‌غلتد.

نقطه‌ای از این دایره را P می‌نامیم. این نقطه یک خم روی صفحه XOY پدید

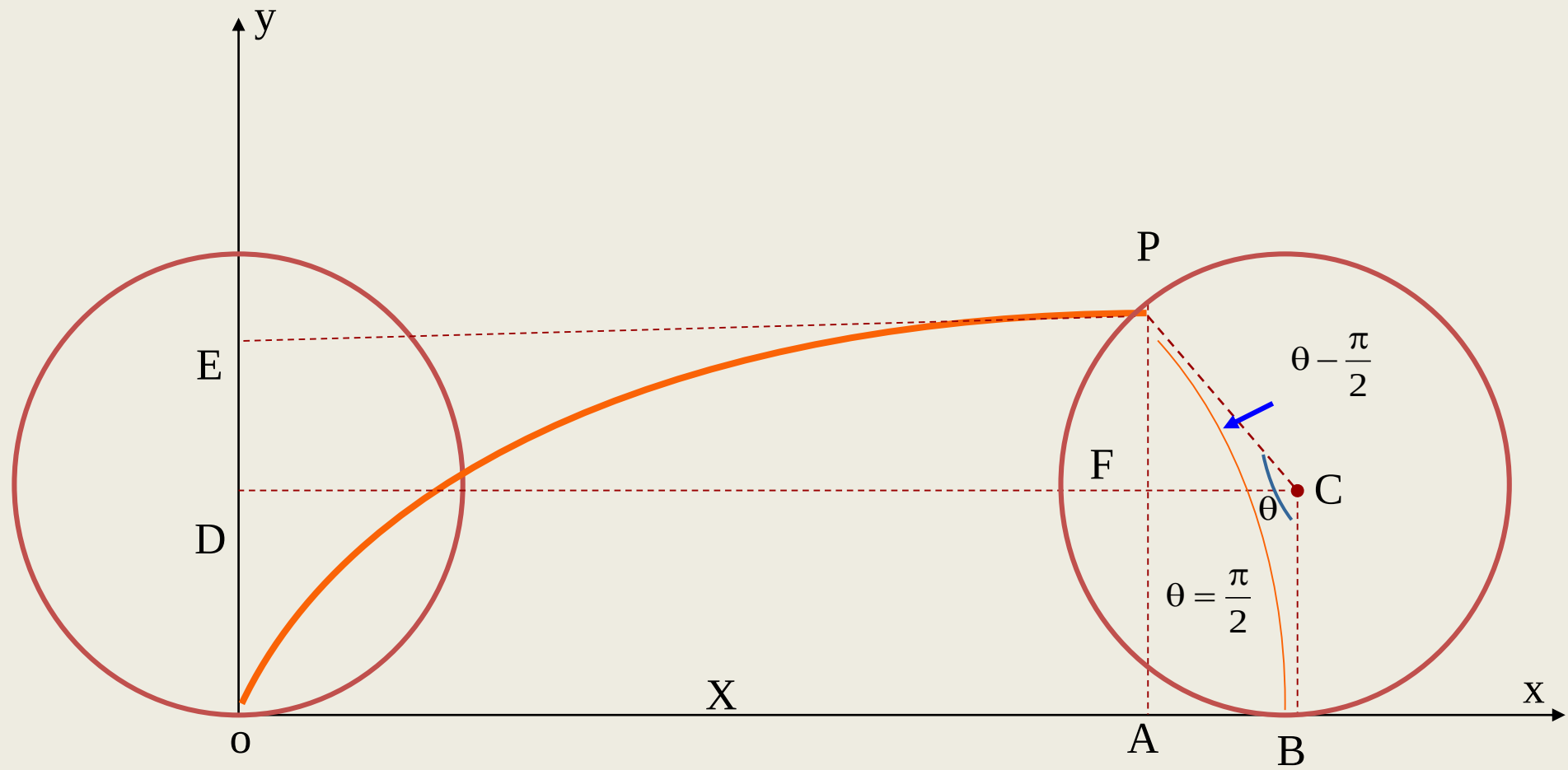
می‌آورد. این خم را **چرخزاد** یا **سیکلوئید** می‌نامیم. می‌خواهیم معادله‌های

پارامتری چرخزاد را به دست آوریم.

برای این منظور فرض می‌کنیم مکان اولیه P ، نقطه O مبدا مختصات باشد.

حال دایره را در جهت مثبت محور X می‌غلتانیم که P در وضعیت شکل زیر

قرار گیرد.



توجه کنید که طول های کمانهای OP و PB و پاره خط OB مساوی اند. بنا براین
 شکل ، مختصات نقطه P به زاویه θ بستگی دارد. اگر (x,y) مختصات نقطه P باشد
 آنگاه

$$x=OB-AB \quad , \quad y=OD-DE=a+DE$$

از مثلث PFC داریم

$$AB = FC = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = a \sin \theta$$

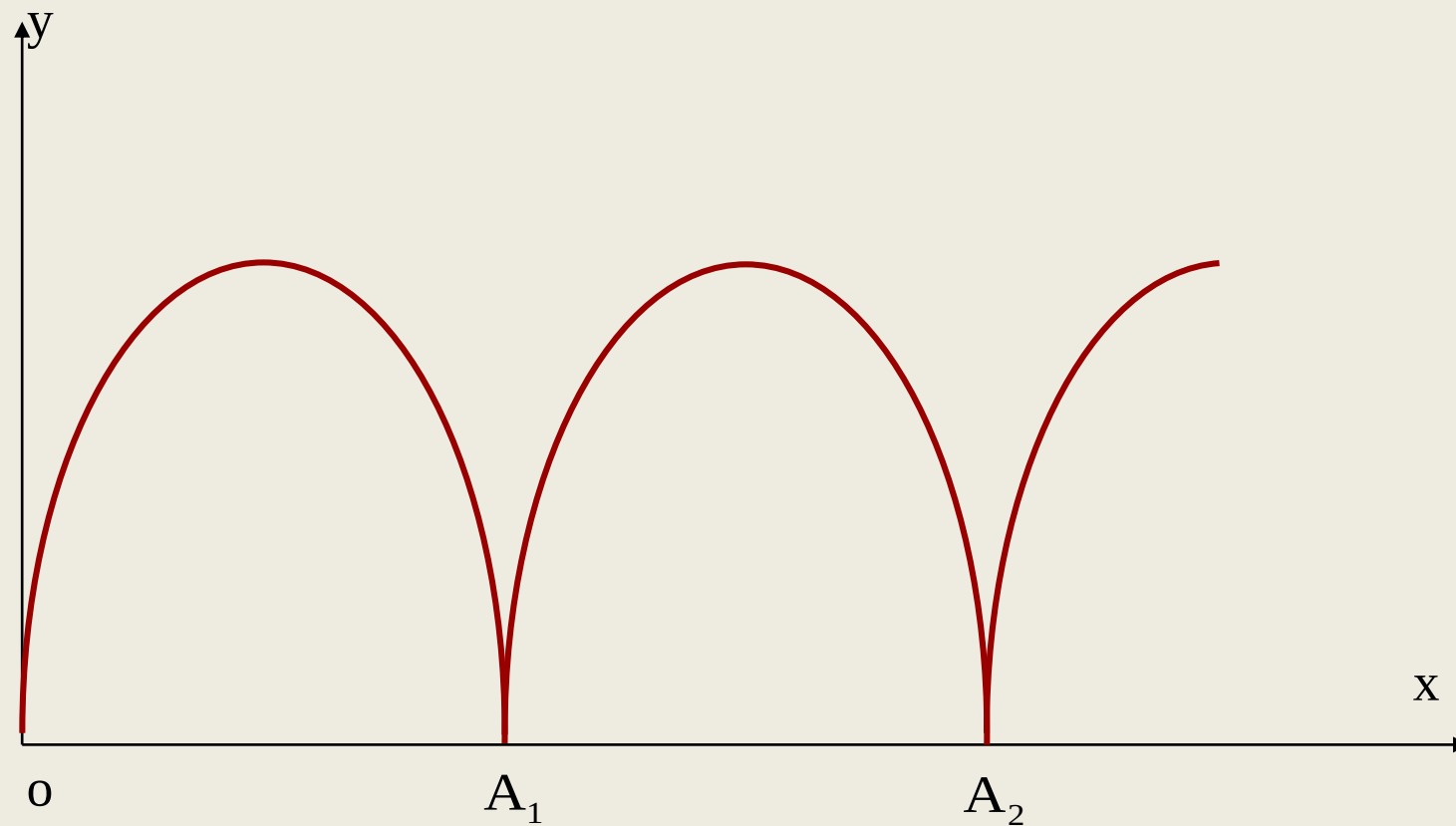
$$ED = PF = a \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cos \theta$$

در دایره به مرکز C و شعاع a داریم

$$\widehat{OB} = \widehat{PB} = a \theta$$

در نتیجه

$$x = a\theta - a \sin \theta \quad , \quad y = a - a \cos \theta$$



$2\pi a$

چرخزاد ، طول خم OA_1 است با

۲. مشتق توابع برداری

۲.۳.۱ تعریف

می‌گوئیم تابع برداری

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (n = 2 \text{ یا } n = 3)$$

در نقطه $t \in [a, b]$ ~~مستقیم~~ است اگر

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{1}{x - t} (f(x) - f(t))$$

وجود داشته باشد. بدیهی است در نقاط $t = a$ و $t = b$ منظور از وجود حد فوق ،

وجود حد های یکطرفه به ترتیب راست و چپ است.

در صورتی که f در نقطه t مشتقپذیر باشد، حد فوق را **مشتق f** در نقطه t می نامیم

و آن را با $f'(t)$ نشان می دهیم. بنابراین

$$f'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

مشتق f در نقطه $t=a$ و $t=b$ را به ترتیب با $f'(a^+)$ یا $f'(b^-)$ می دهیم.

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{بنابراین}$$

$$f'(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t)) \quad , \quad n = 2 \quad \text{به ازای } n = 2^*$$

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \quad , \quad n = 3 \quad \text{به ازای } n = 3^{**}$$

✳️ بنابراین f در نقطه t مشتق پذیر است اگر و تنها اگر مولفه‌های آن در این

نقطه مشتق پذیر باشند.

۲.۳.۲ مثال

$$f(x) = (e^{1-x^2}, \ln x, 1-x^2) \quad \text{مشتق تابع}$$

را در نقطه $\frac{1}{2}$ پیدا می‌کنیم.

حل:

بنابر رابطه ** به ازای هر $x > 0$ داریم:

$$f'(x) = \left(-2xe^{1-x^2}, \frac{1}{x}, -2x \right)$$

در نتیجه

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = (-e^{3/4}, 2, -1)$$

۳.۳.۲ مثال

می خواهیم $(f \cdot g)'(0)$ ، $(f * g)'(0)$ ، $(\phi f)'(0)$

$$f(t) = (\sqrt{t+1}, t^2 - 1, 2t)$$

$$g(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, 2t \right)$$

$$\phi(t) = \ln(2t + 1)$$

محاسبه کنیم.

حل:
داريم

$$f(0) = (1, -1, 0) \quad , \quad f'(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$$

$$g(0) = (0, -1, 0) \quad , \quad g'(0) = (2, 0, 2)$$

$$\phi(0) = 0 \quad , \quad \phi'(0) = \ln 2$$

$$(f \cdot g)'(0) = f'(0) \cdot g(0) + f(0) \cdot g'(0) = 0 + 2 = 2$$

$$\begin{aligned} (f \times g)'(0) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \left(2, 0, -\frac{1}{2}\right) + (-2, -2, 2) = \left(0, -2, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(\phi f)'(0) = \phi'(0)f(0) + \phi(0)f'(0) = \ln 2 \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right) = \left(\frac{1}{2} \ln 2, 0, 2 \ln 2\right)$$

۲.۳.۴ قضیه:

زنجیر توابع $n = 2$ یا 3

$$[a, b] \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$$


$g \circ f$

را که در آن $I \supset [a, b]$ و f بازه در $\mathbb{R}$ است در نظر بگیرید. فرض کنید f در

نقطه $t \in [a, b]$ مشتق پذیر باشند. در این صورت تابع برداری

$g \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر است و داریم

$$(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t)$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{d(g \circ f)}{dt} = \frac{dg}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dg}{ds} \frac{df}{dt}$$

توجه کنید که در این قضیه تابع f یک تابع اسکالر است.

۵.۳.۲ مثال

$$h(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}, \sin \sqrt{t-1}, \ln t \right) \quad \text{ب) اگر}$$

$h(t)$ و به ویژه $h'(1)$ محاسبه می کنیم.

حل:

قرار می دهیم:

$$g(t) = \left(\frac{1}{t}, \sin t, \ln(1+t) \right), \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$$

و به دست می آوریم: $h(t) = (g \circ f)(t)$

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(t-1)^{-3/2} \quad \text{چون } f(2)=1 \text{ و } f'(2) = -\frac{1}{2}$$

$$g'(t) = \left(-\frac{1}{t^2}, \cos t, \frac{1}{1+t} \right) \quad g'(1) = \left(-1, \cos 1, \frac{1}{2} \right)$$

$$h'(t) = -\frac{1}{2}(t-1)^{-3/2} \left(-\frac{1}{t^2}, \cos t, \frac{1}{1+t} \right)$$

$$h'(2) = g'(1)f'(2) = -\frac{1}{2} \left(-1, \cos 1, \frac{1}{2} \right)$$

۶.۳.۲ تعریف

تابع برداری

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad n = 2 \text{ یا } 3$$

را روی $[a, b]$ هموار می نامیم اگر به ازای هر $t \in [a, b]$ داشته باشیم

روی $[a, b]$ پیوسته باشد و داشته باشیم $|f'(t)| \neq 0$.

اگر $n = 2$ توجه کنید به ازای هر t داریم:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

آنگاه نابرابری* به صورت زیر در می آید.

$$(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 \neq 0$$

✳ و بنا براین خم f همواره روی (a,b) هموار است اگر و تنها اگر در هر نقطه

مشتق یکی از مولفه های f غیر صفر باشد. توجه کنید که این مطلب در حالت

$n = 3$ نیز برقرار است.

۷.۳.۲ مثال

$$f(t) = (|t|, \ln(1+t), (1+t^2))$$

الف) خم

$$f_1(t) = |t|$$

روی $[-1, 1]$ هموار نیست ، زیرا در نقطه $t = 0$ مولفه اول آن مشتقپذیر نیست.

ب) خم زیر روی $[0,1]$ هموار است.

$$f(t) = (\sin t, \sin t, t^2 + 1)$$

۸.۳.۲ مثال

الف) خم

$$f(t) = (|t|, \ln(1+t), (1+t^2)) \quad t \in [-1, 1]$$

روی $[-1, 1]$ پاره هموار است ، زیرا این خم در نقطه $t = 0$ مشتق ندارد.

ب) چرخزاد به عنوان یک خم در نقطه های $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ،

و در بقیه نقاط هر بازه متناهی هموار است.

پ) خم

$$f(t) = (t^2, t^2, t^4)$$

در نقطه $t = 0$ هموار نیست ، زیرا

$$|f'(0)| = 0$$

۲. طول قوس خم

۲.۴.۱ تعریف

الف) فرض میکنیم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad n = 2 \text{ یا } 3$$

خمی هموار باشد. طول این خم را با S نشان می دهیم و با رابطه زیر تعریف

می کنیم:

$$s = \int_a^b |f'(t)| dt$$

ب) اگر f در نقاط t_1 ، متعلق به $[a, b]$ پاره هموار باشد و

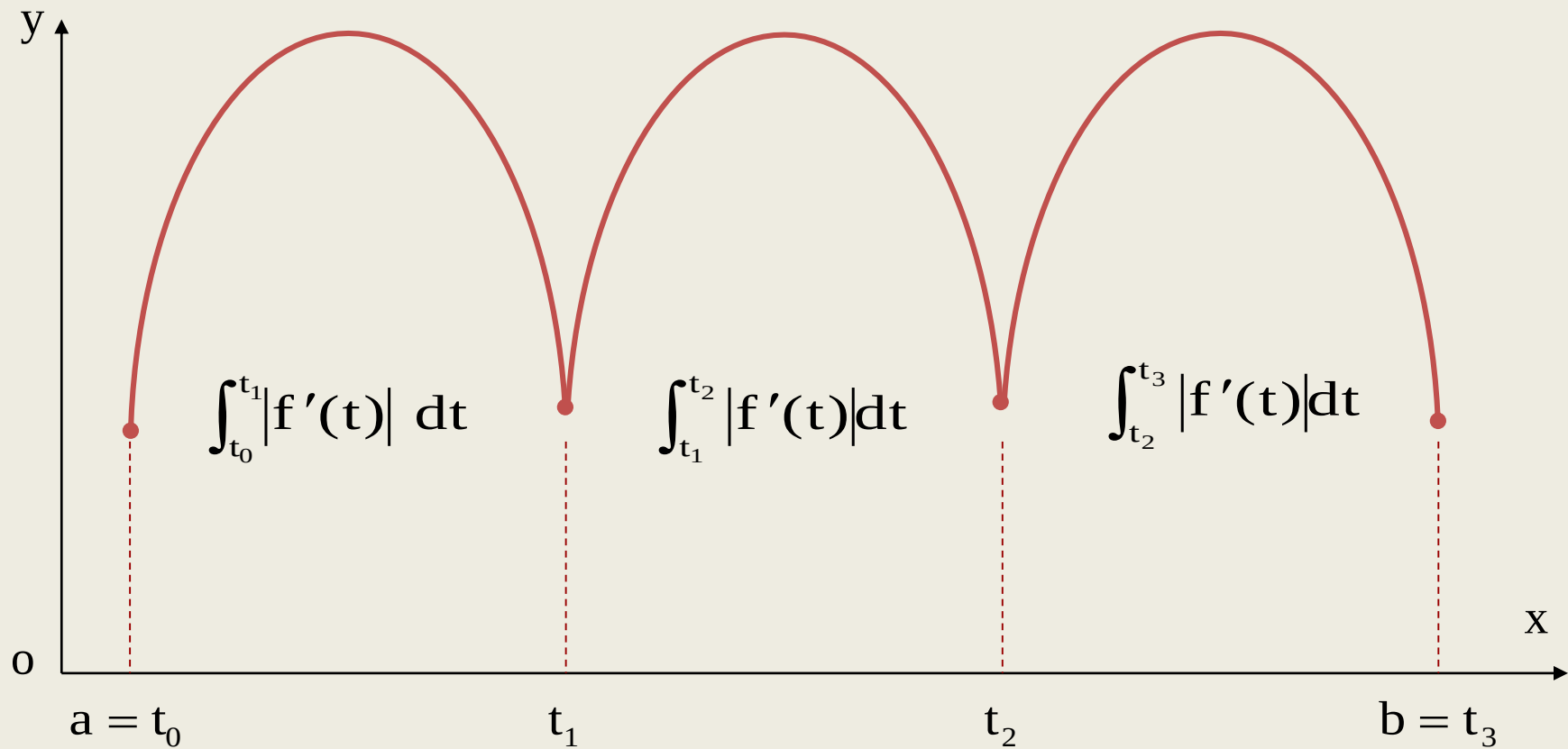
$$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$$

طول رابطه زیر تعریف می کنیم

$$s = \int_a^{t_1} |f'(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)| dt + \dots + \int_{t_n}^b |f'(t)| dt$$

با قرار دادن $a = t_0$ این فرمول با صورت زیر در می آید.

$$s = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(t)| dt$$



طول خم پاره هموار

توجه کنید که اگر به ازای $n = 2$ 

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

آنگاه

$$s = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t)} dt$$

همچنین به ازای $n = 3$ و بنابراین $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$

$$s = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt$$

۲.۴.۲ مثال

الف) طول خم

$$f(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, 1]$$

مساوی است با

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2t^2)} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5})$$

ب) خم

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

هموار است و طول آن مساوی است با

$$\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

✱ مشاهده می کنیم که طول خم تابعی از پارامتر تعریف کننده خم نیز هست ،

یعنی اگر $a \leq t \leq b$

$$s(t) = \int_a^t |f'(\eta)| d\eta$$

چون $|f'(\eta)|$ پیوسته روی $[a, b]$ است ، پس s تابعی مشتقپذیر از t است

و داریم

$$\frac{ds(t)}{dt} = |f'(t)| = \left| \frac{df}{dt} \right|$$

در نتیجه

$$\left| \frac{dt}{ds} \right| = 1$$

✱ با توجه به این پدیده تعریف زیر را داریم.

۵.۴.۲ تعریف

می گوئیم خم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad n = 2 \text{ یا } 3$$

یا

$$f(s) = (f_1(s), f_2(s)) \quad \text{یا} \quad f(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s))$$

توسط طول خم **پارامتری** شده است اگر

$$\left| \frac{df}{ds} \right| = 1$$

البته با توجه به قاعده زنجیری ، اگر t پارامتر دیگری برای خم باشد ، داریم

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = f'(t) \frac{dt}{ds} = \frac{f'(t)}{\frac{ds}{dt}}$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

۶.۴.۲ مثال

ب) پیچوار

$$f(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad t \in \mathbb{R}$$

رانسبت به طول خم پارامتری می کنیم.

حل:

طول خم در بازه $[0, t]$ عبارت است از

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\eta = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

$$s(t) = \int_{-t}^0 \sqrt{a^2 + b^2} d\eta = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

واز این رو ، در هر دو مورد داریم

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حال این مقدار t را در تعریف f قرار می دهیم و به دست می آوریم.

$$f(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad s \geq 0$$

اکنون توجه کنید که با این نمایش طول خم f در بازه $[0, s]$ مساوی است با s و به علاوه داریم

$$\left| \frac{df}{ds} \right| = 1$$

پ) آیا خم

$$f(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t) \quad t \in \mathbb{R}$$

را می توان با طول خم پارامتری کرد؟

حل:

نقطه $t_0 \in \mathbb{R}$ را در نظر می گیریم. طول خم از نقطه $f(t_0)$ تا $f(t)$ عبارتست از:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |f'(\eta)| \, d\eta = \int_{t_0}^t e^\eta \sqrt{3} \, d\eta = \sqrt{3}(e^t - e^{t_0})$$

بنابراین t تابعی از s است و داریم

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right) \quad \text{یا} \quad e^t = \frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}$$

در نتیجه خم را می توان توسط s پارامتری کرد و مولفه های آن را به صورت زیر

به دست آورد.

$$f_1(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right) \sin \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right), \quad s \geq 0$$

$$f_2(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right) \cos \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right), \quad s \geq 0$$

$$f_3(s) = \frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}, \quad s \geq 0$$

این مولفه ها صورت ساده تری به خود می گیرند.

توجه کنید که با انتخاب 

۲.۴.۷ تعریف

انتگرال تابع پیوسته

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

را به صورت $\int_a^b f(t) dt$ می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \int_a^b f_3(t) dt \right)$$

به همین ترتیب انتگرال تابع پیوسته زیر تعریف می‌شود.

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \quad t \in [a, b]$$

✱ توجه کنید که انتگرال هر تابع برداری، برداری از جنس مقادیر همان تابع

است. مفهوم انتگرال تابع برداری بسیاری از ویژگی‌های انتگرال توابع حقیقی

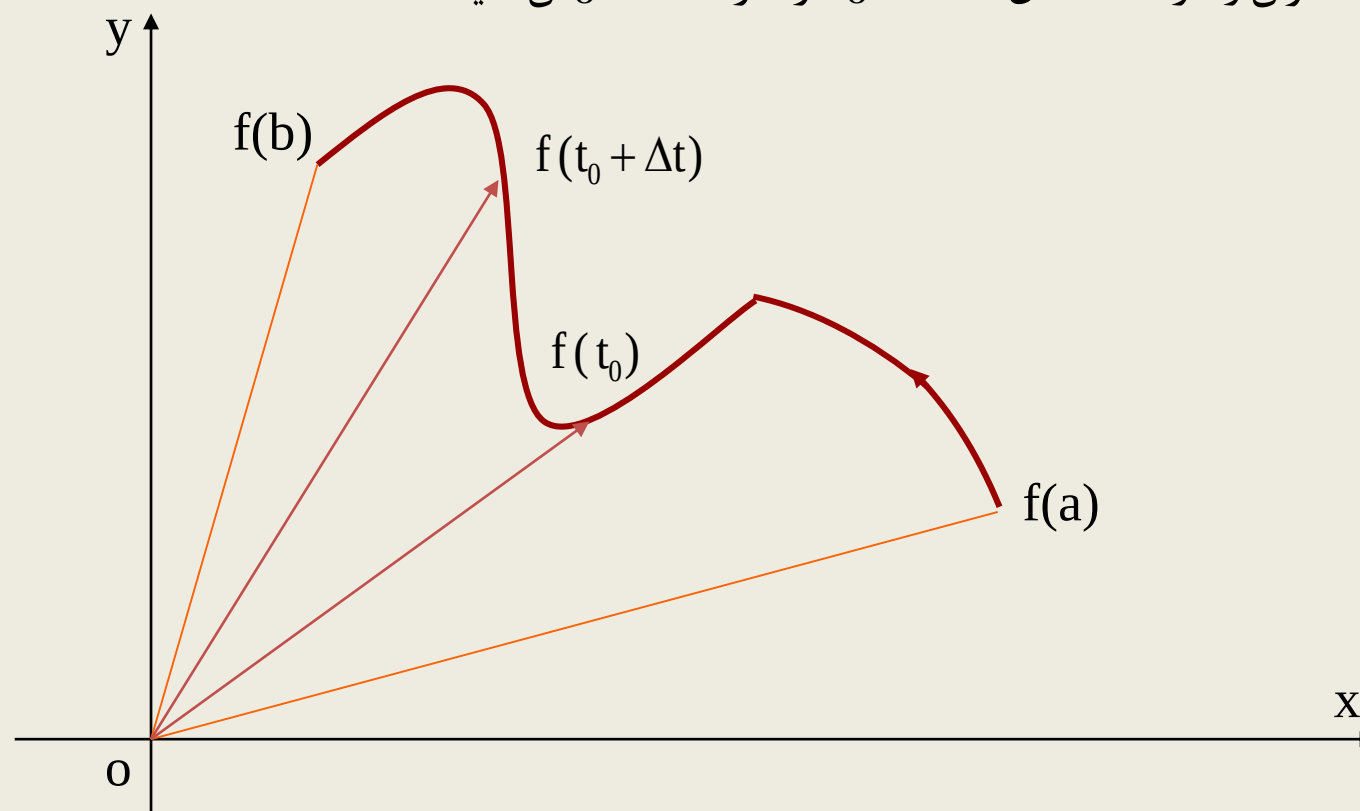
را دارا است. با وجود این، این مفهوم در قضیه میانگین برای انتگرال صدق نمی‌کند.

۵. حرکت در صفحه

۱.۵.۲ تعریف

بردار OA را شعاع حامل متحرک در لحظه t می نامیم ، در شکل زیر مسیر

متحرکی را در لحظه های t_0 و a و b مشاهده می کنید.



۲.۵.۲ تعبیرهای مشتق

فرض کنید $f(t) = x(t)i + y(t)j$

مکان متحرکی در لحظه t باشد، در این صورت رابطه

$$f(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)i + y(t + \Delta t)j$$

مکان این متحرک در لحظه $t + \Delta t$ خواهد بود. بنابراین

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

نماینده **بردار سرعت متوسط** در بازه زمانی از t تا $t + \Delta t$ است. در نتیجه در

صورتی که حد

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

وجود داشته باشد، برابر با بردار سرعت در لحظه t خواهد بود.

با توجه به این مطلب اگر سرعت متحرک در لحظه t را با $v(t)$ نشان دهیم ، بنا به تعریف مشتق داریم

$$f'(t) = x'(t)i + y'(t)j = v(t)$$

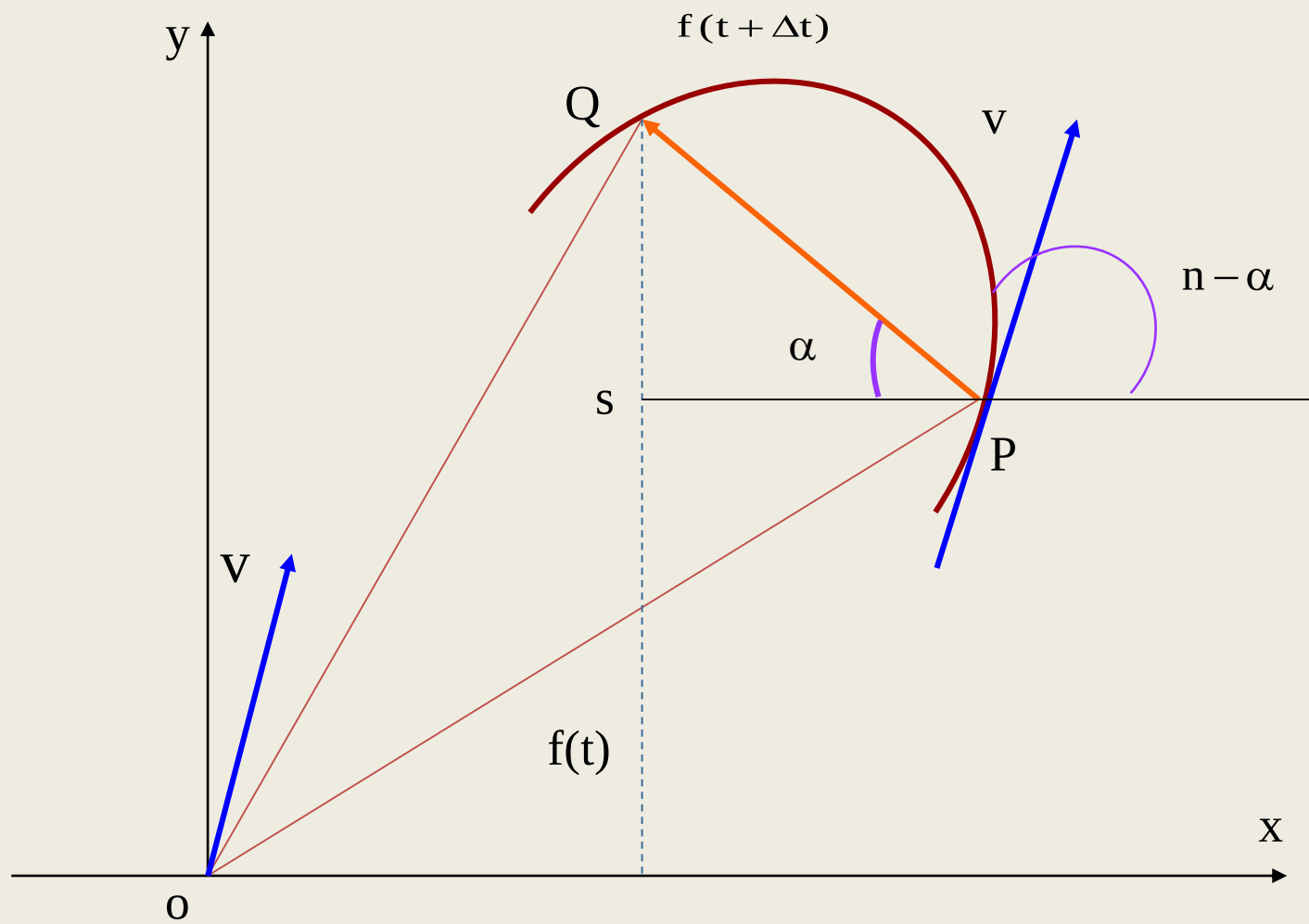
یعنی مشتق f در لحظه t ، مساوی است با سرعت متحرک در این لحظه ، اکنون

با توجه به شکل اسلاید بعدی مشاهده می کنیم که

$$f(t + \Delta t) = f(t)i + \vec{PQ}$$

بنابراین داریم

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{PQ}}{\Delta t}$$



اگر v از $f(t)$ رسم شود ، بر مسیر متحرک مماس است.

در نتیجه اگر $\Delta t \rightarrow 0$ آنگاه نقطه Q روی مسیر متحرک به نقطه P میل می کند و

لذا خط PQ به خط مماس بر خم تبدیل می شود. این بدان معناست که اگر مبدا

برداری v را به نقطه P منتقل کنیم آنگاه $v(t)$ بر مسیر متحرک یا بر خم داده شده

مماس می شود.

✳ بنابراین مشتق به عنوان یک بردار بر مسیر متحرک **مماس** است.

۳.۵.۲ تعریف

اگر $v(t)$ سرعت متحرک در لحظه t باشد، $|v(t)|$ را **اندازه بردار** سرعت متحرک می نامیم.

بنابراین خم مشتقپذیر

$$f(t) = x(t)i + y(t)j$$

مسیر متحرک باشد آنگاه اندازه بردار سرعت این متحرک عبارت است از

$$|v(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

توجه کنید که سرعت متحرک یک بردار و اندازه بردار سرعت یک عدد

است.

۴.۲.۵ مثال

(الف) مکان متحرکی در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{f}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$$

مسیر ، سرعت و اندازه بردار سرعت این متحرک رامعین می کنیم.

حل:

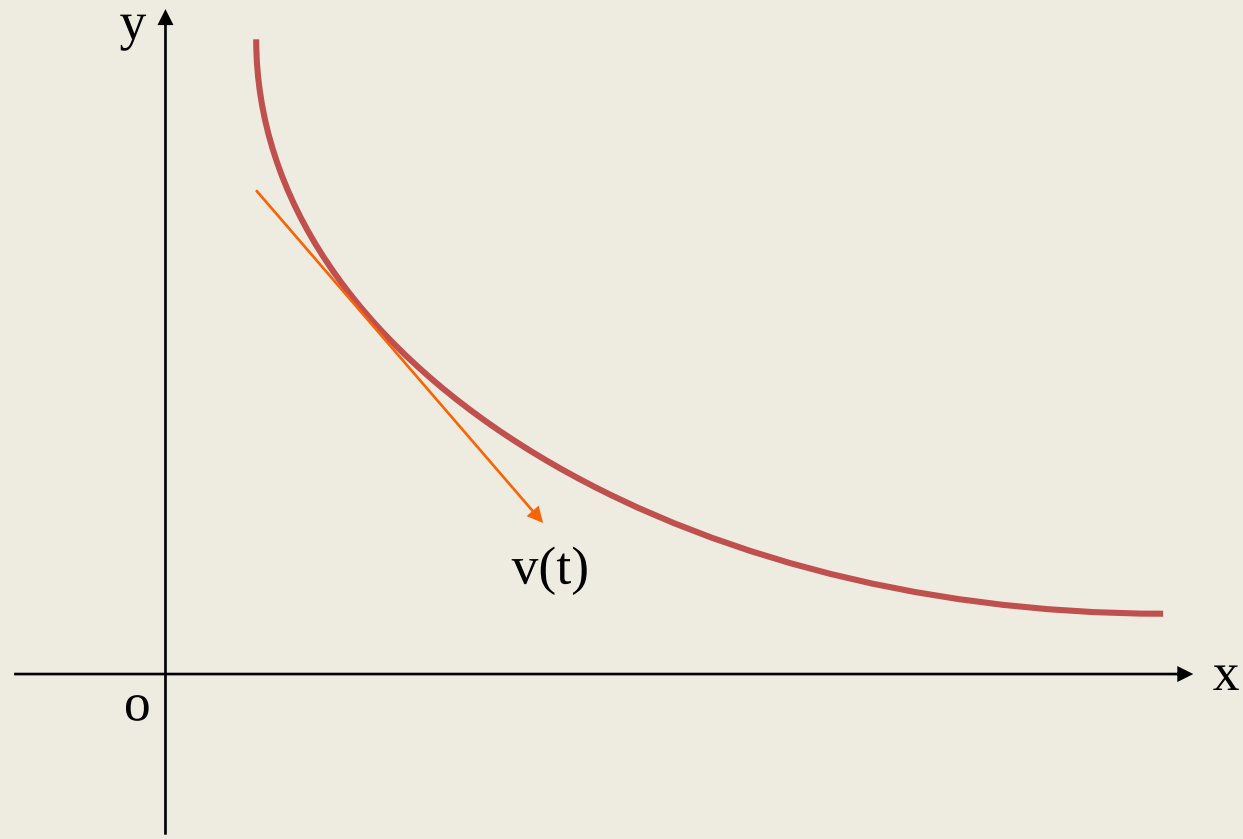
مختصات متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$x = e^t , \quad y = e^{-t}$$

مشاهده می کنیم که در هر لحظه t ، $x > 0$ و $y > 0$

$$y = \frac{1}{x}$$

بنابراین مکان متحرک شاخه ای از هذلولی $xy = 1$ است که در ربع اول واقع است.



سرعت و اندازه بردار سرعت این متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$\mathbf{v}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} \quad , \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} = \sqrt{2 \cosh 2t}$$

مشاهده می کنیم که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-e^{-t}}{e^t} < 0$$

بنابراین زاویه بردار سرعت با جهت مثبت محور X، باز (منفرجه) است لذا بردار

سرعت به صورتی است که در شکل اسلاید پیش نشان داده شده است.

ب) یک ذره طبق رابطه زیر حرکت می کند

$$\mathbf{f}(t) = (r \cos \omega t)\mathbf{i} + (r \sin \omega t)\mathbf{j}$$

که در آن r و ω اعداد مثبت و ثابت اند. مسیر، سرعت و اندازه بردار سرعت این

متحرک را شناسایی می کنیم.

حل:

مختصات این متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$x(t) = r \cos \omega t \quad , \quad y(t) = r \sin \omega t$$

چون

$$x^2(t) + y^2(t) = r^2$$

✳ پس مسیر متحرک دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع r است.

سرعت و اندازه بردار سرعت متحرک در لحظه t عبارت اند از

$$\mathbf{v}(t) = (-r\omega \sin \omega t)\mathbf{i} + (r\omega \cos \omega t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{r^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = r\omega$$

چون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r \cos \omega t}{-r \omega \sin \omega t} = -\omega \cot \omega t = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right)$$

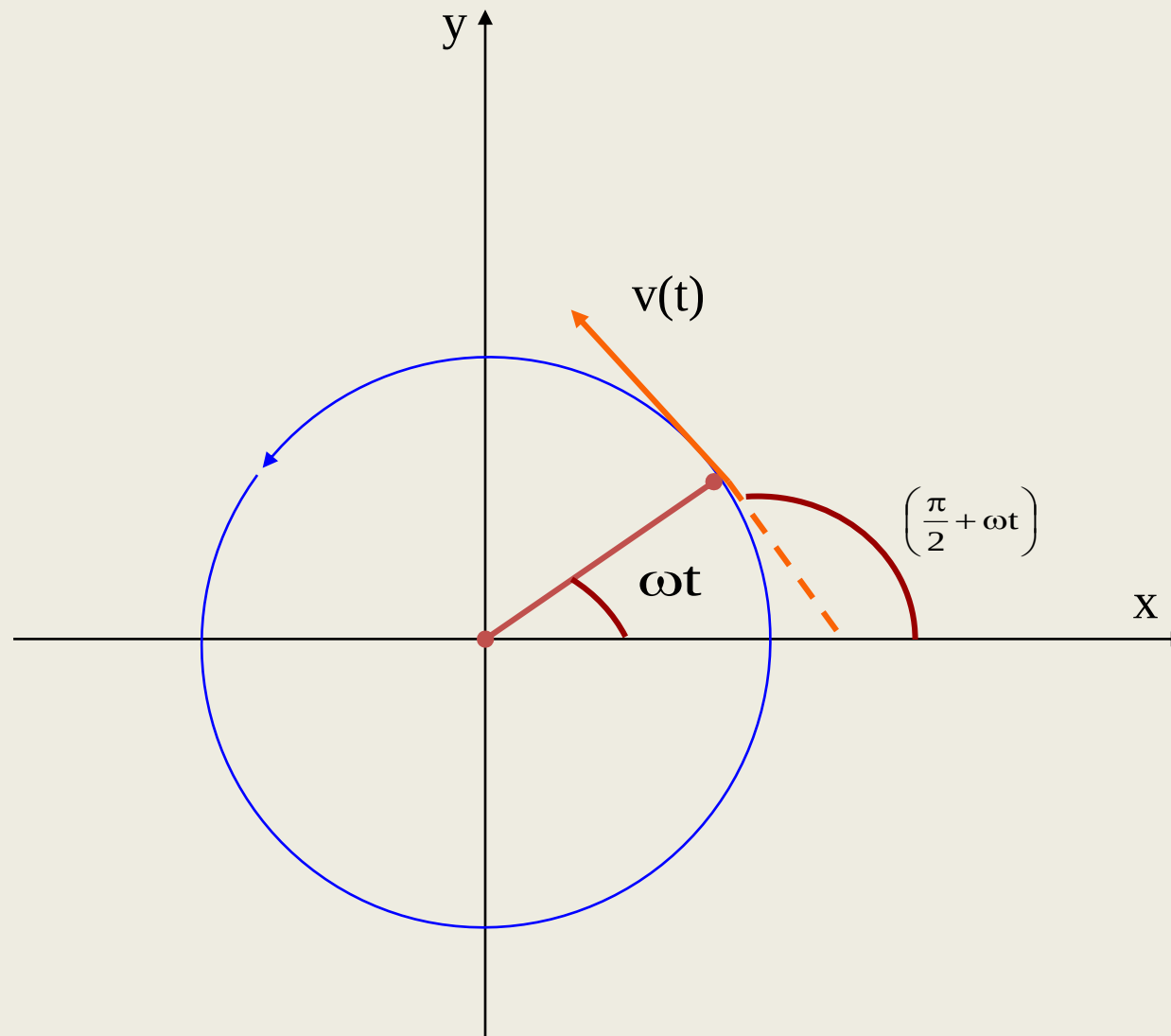
بنابراین در لحظه t ، زاویه بردار سرعت $v(t)$ با جهت مثبت محور X مساوی

$$\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) \quad \text{است با}$$

با توجه به اینکه در لحظه t ، شعاع حامل $f(t)$ با جهت مثبت محور X مساوی

است با ωt نتیجه می گیریم که بردارهای $f(t)$ و $v(t)$ در هر لحظه بر هم

عمودند و جهت $v(t)$ در جهت افزایش t است.



شعاع حامل و سرعت متعامدند

۵.۵.۲ تعریف

فرض کنید خم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

مسیر متحرکی است و دست کم دو بار مشتقپذیر باشد. در این صورت بردار

$$f''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

را **شتاب متحرک** می نامیم و معمولاً آن را با $a(t)$ نشان می دهیم.

✳ بنابراین بردار $a(t)$ شتاب متحرک ، مشتق سرعت متحرک است.

$$a(t) = v'(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

۵.۲.۷ بردار یکه مماس

فرض کنید مسیر متحرک ، خم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

توسط پارامتر طول خم s ، پارامتری شود. به ویژه داریم

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\eta)| \, d\eta$$

بنابراین داریم

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)|$$

(الف)

$$\mathbf{v}(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{df}{ds} |\mathbf{v}(t)|$$

(ب)

$$\frac{df}{ds} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

ولذا

یعنی اگر خم ، مسیر متحرک ، نسبت به پارامتر طول خم پارامتری شود ،

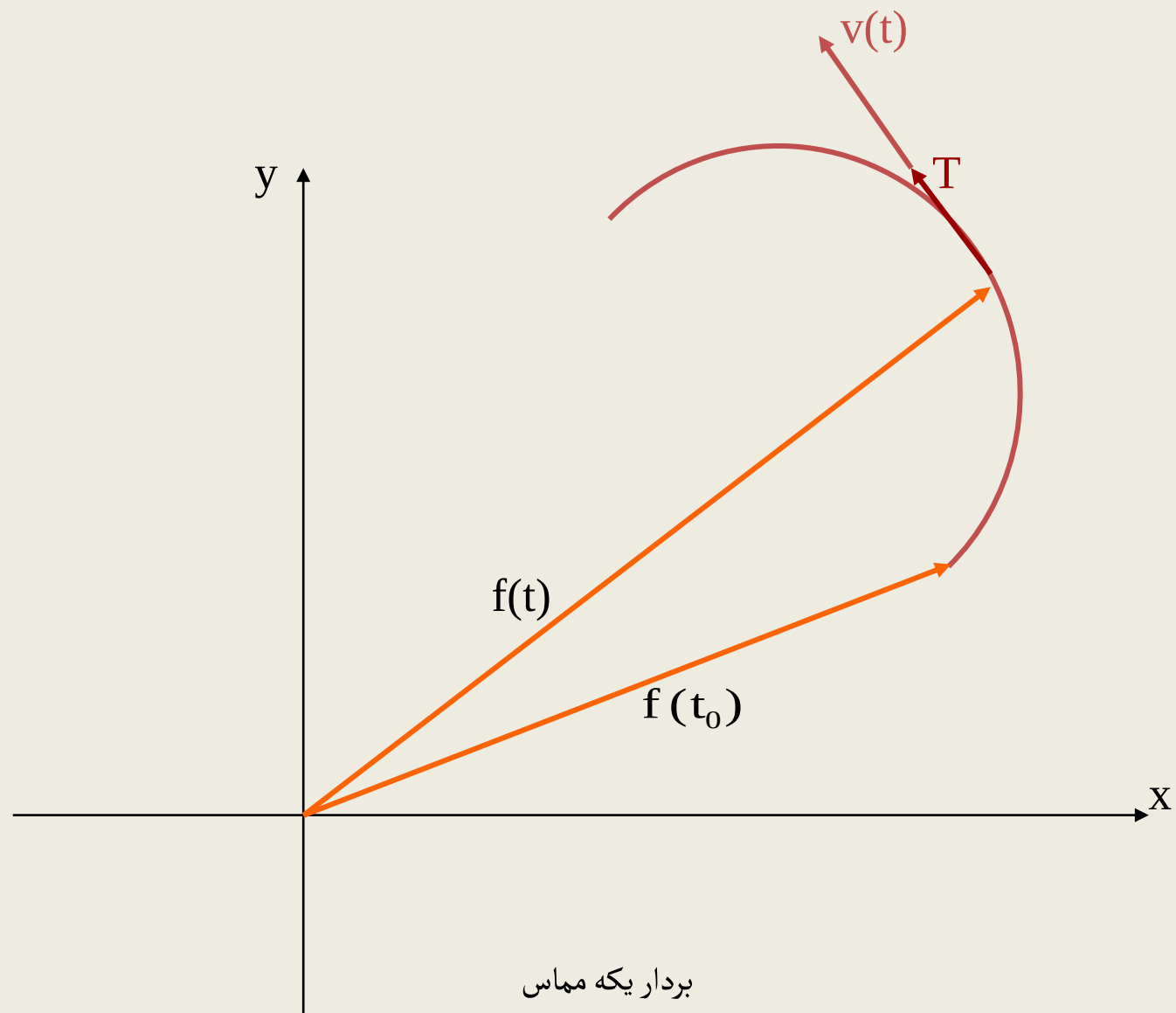
بردار سرعت نسبت به این پارامتر ، برداری واحد است و جهت آن با جهت

بردار سرعت نسبت به هر پارامتر دیگری است. این بردار را **بردار یکه**

مماس می نامیم و با T نشان می دهیم.

$$T = \frac{df}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|}$$

در شکل اسلاید بعدی بردار یکه مماس T را در لحظه t رسم کرده ایم.



۱۰.۲.۵ بردار یکه قائم

فرض کنید خم هموار

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

مسیر حرکت یک متحرک باشد. بنابراین در هر لحظه t ، بردار یکه مماس T بر

این خم یا مسیر تعریف شده است. زاویه T با جهت مثبت محور X را θ می نامیم.

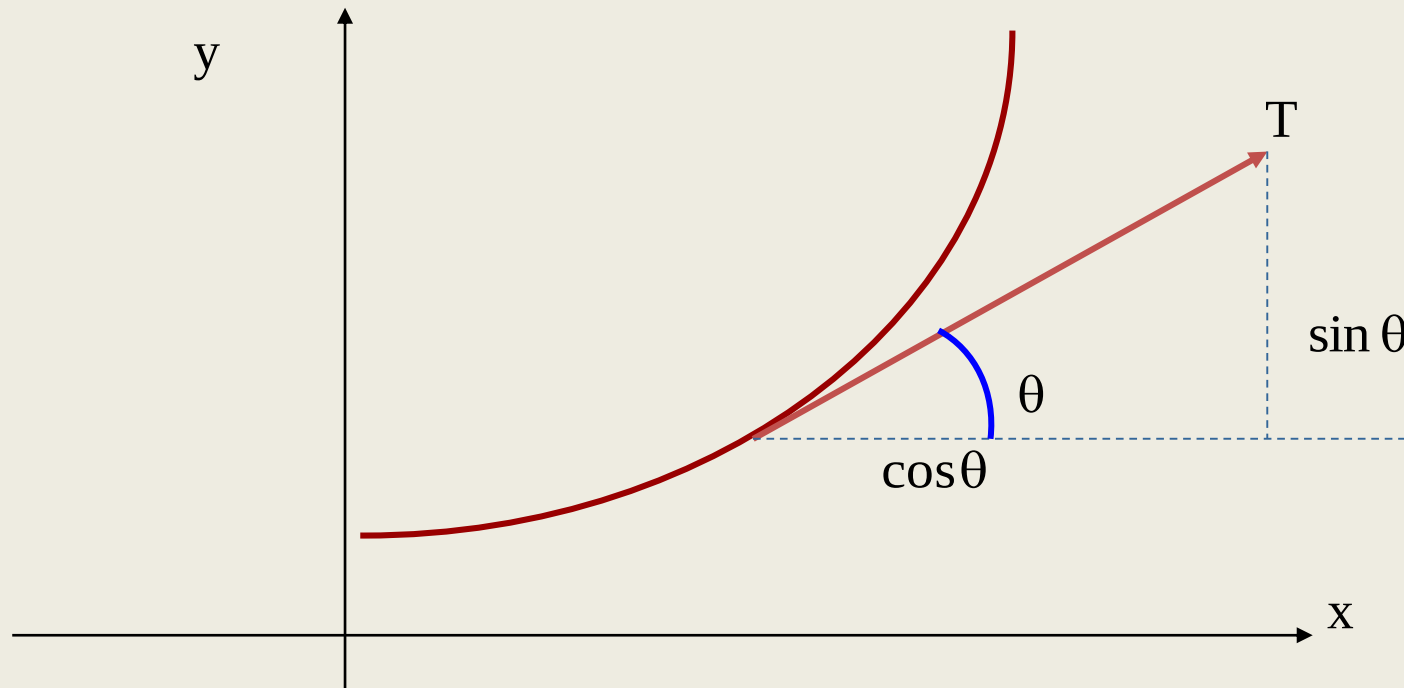
چون T برداری یکه است، پس جهت آن تابعی از اندازه زاویه θ است.

با توجه به شکل اسلاید بعدی می نویسیم

$$T = T(\theta) = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$$

داریم

$$\frac{dT}{d\theta} = (-\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$$

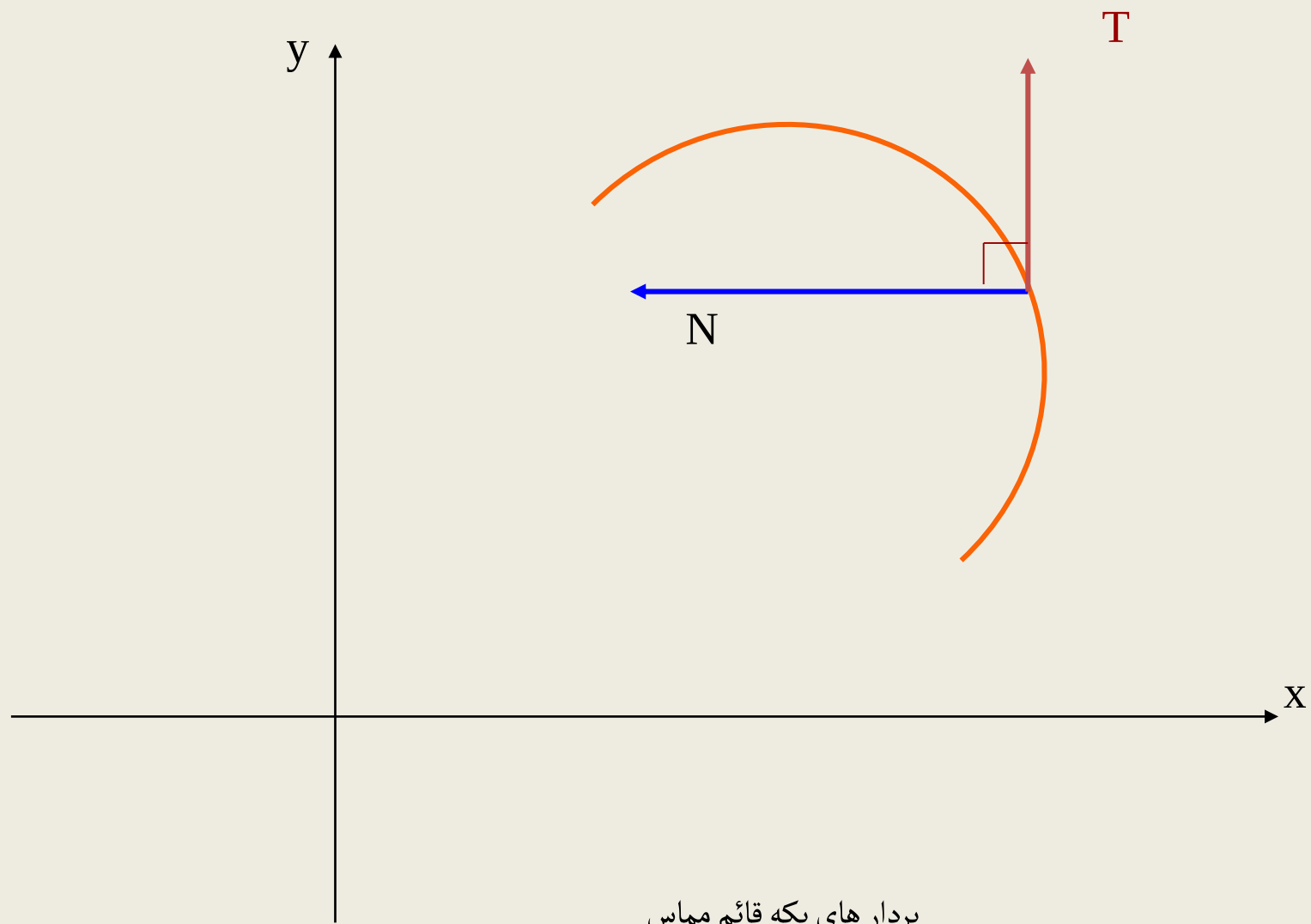


بنابراین برداری یکه وعمود بر T است و با جهت مثبت محور x زاویه ای به $\frac{dT}{d\theta}$

اندازه θ می سازد. بنابراین دو برداری که قائم بر T با جهت های $\frac{dT}{d\theta}$

مخالف هم هستند. یکی از این دو بردار را که جهت آن به طرف تعقر خم است

بردار یکه قائم می نامیم و با N نشان می دهیم.



۱۱.۲.۵ مولفه های مماسی و قائم سرعت وشتاب

فرض کنید مسیر متحرک ، خم هموار و دو بار مشتقپذیر

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)i + y(t)j$$

باشد. سرعت این متحرک در لحظه t مساوی است با

$$V(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right) T^*$$

بنابراین در دستگاه مختصات TN داریم

$$V(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right) T + 0N$$

یعنی مولفه های $v(t)$ در دستگاه TN عبارت است از $\frac{ds}{dt}$ و این عدد را به

ترتیب **مولفه های مماسی و قائم سرعت** می نامیم.

حال از رابطه * نسبت به t مشتق می گیریم تا شتاب متحرک را به دست آوریم.

داریم

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} T \right) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \left(\frac{dT}{dt} \right)$$

حال $\left(\frac{dT}{dt} \right)$ را با استفاده از پارامتر محاسبه می کنیم داریم

**

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

با قرار دادن $\frac{dT}{dt}$ از این رابطه در رابطه فوق به دست می آوریم

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} \left(\frac{dT}{d\theta} \right)$$

می دانیم که نامزد خوبی برای بردار یکه قائم است فقط جهت آن است $\frac{dT}{d\theta}$

که اجازه نمی دهد در این رابطه به جای آن N قرار دهیم. برای تشخیص جهت

به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{dT}{d\theta}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

الف) اگر $\frac{d\theta}{dt} > 0$ آنگاه نسبت به t صعودی است و بنابراین با افزایش t ،
 T در جهت مثلثاتی تاییده می شود و لذا زاویه بین T و $\frac{dT}{d\theta}$ است که برابر است

در جهت مثلثاتی تغییر می کند. این بدان معناست که

$$\frac{dT}{d\theta} = N$$

ب) اگر $\frac{d\theta}{dt} < 0$ آنگاه نسبت به t نزولی است و لذا بر حسب افزایش t ،

T در جهت عقربه های ساعت تاییده می شود. و در این حالت داریم

$$\frac{dT}{d\theta} = -N$$

در نتیجه فرمول** را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right) \left(\pm \frac{d\theta}{ds} \right) N = \frac{ds}{dt} \left| \frac{d\theta}{ds} \right| N$$

با استفاده از این فرمول ، رابطه *** به صورت زیر در می آید.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \mathbf{N}$$

عدهای $\frac{d^2s}{dt^2}$ و $\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$ را به ترتیب **مولفه های مماسی وقائم شتاب**

می نامیم. و آنها را به ترتیب با $\mathbf{a}_T$ و $\mathbf{a}_N$ نشان می دهیم. بنابراین داریم

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_T \mathbf{T} + \mathbf{a}_N \mathbf{N}$$

از این رابطه نتیجه می شود که

$$|\mathbf{a}(t)|^2 = a_T^2 + a_N^2$$

بنابراین برای پیدا کردن $\mathbf{a}_N$ ($\mathbf{a}_T$) لازم است که $|\mathbf{a}(t)|^2 - a_T^2$ ($|\mathbf{a}(t)|^2 - a_N^2$)

را محاسبه کنیم.

۵.۵.۲ تعریف

فرض کنید خم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

مسیر متحرکی است و دست کم دو بار مشتقپذیر باشد. در این صورت بردار

$$f''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

را **شتاب متحرک** می نامیم و معمولاً آن را با $a(t)$ نشان می دهیم.

✳ بنابراین بردار $a(t)$ شتاب متحرک ، مشتق سرعت متحرک است.

$$a(t) = v'(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$

۶.۵.۲ بردار یکه مماس

فرض کنید مسیر متحرک ، خم

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

توسط پارامتر طول خم s ، پارامتری شود. به ویژه داریم

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\eta)| \, d\eta$$

بنابراین داریم

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)|$$

(الف)

$$\mathbf{v}(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{df}{ds} |\mathbf{v}(t)|$$

(ب)

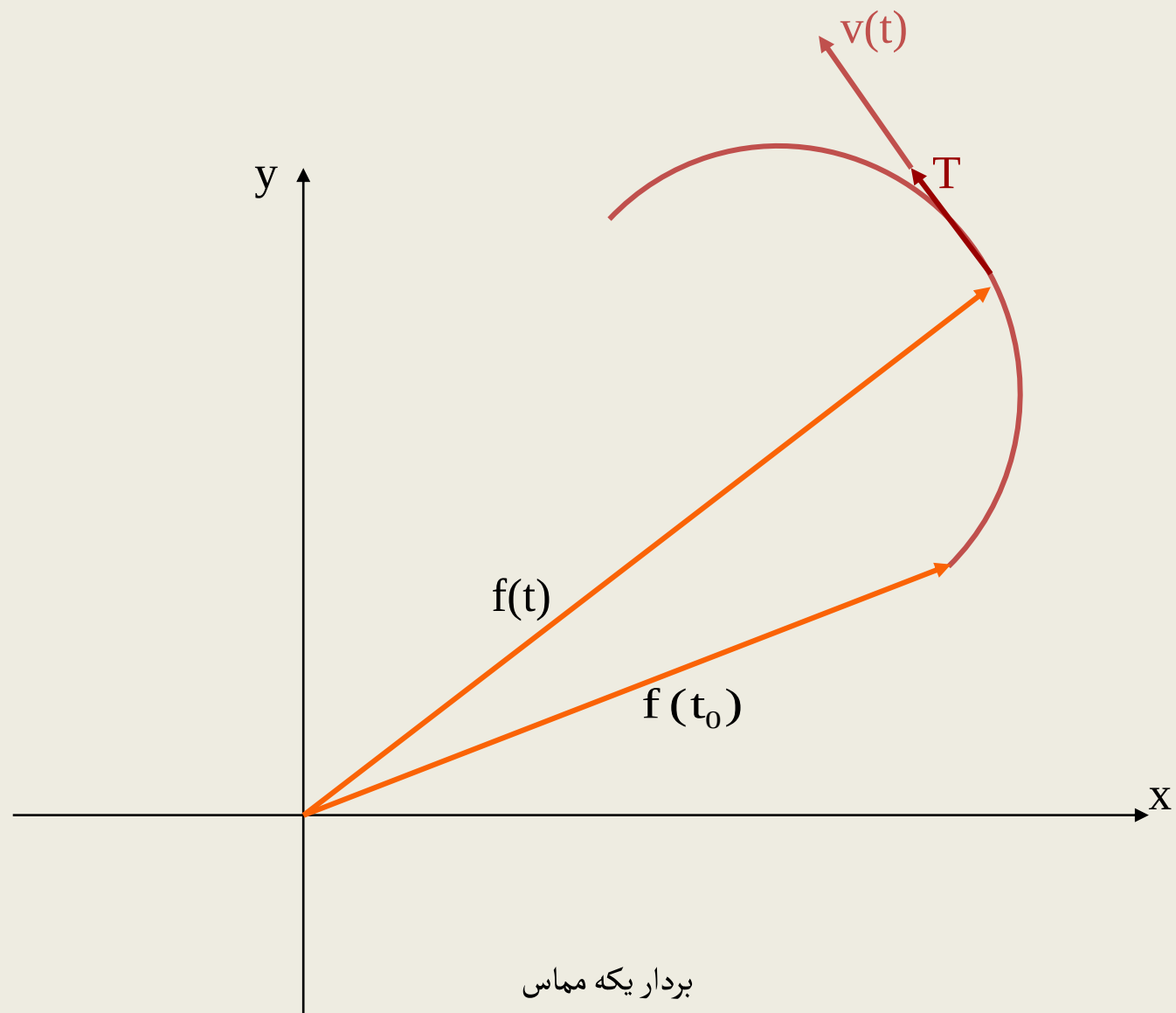
$$\frac{df}{ds} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

ولذا

یعنی اگر خم ، مسیر متحرک ، نسبت به پارامتر طول خم پارامتری شود ،
بردار سرعت نسبت به این پارامتر ، برداری واحد است و جهت آن با جهت
بردار سرعت نسبت به هر پارامتر دیگری است. این بردار را **بردار یکه**
مماس می نامیم و با T نشان می دهیم.

$$T = \frac{df}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|}$$

در شکل اسلاید بعدی بردار یکه مماس T را در لحظه t رسم کرده ایم.



۲.۵.۷ بردار یکه قائم

فرض کنید خم هموار

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

مسیر حرکت یک متحرک باشد. بنابراین در هر لحظه t ، بردار یکه مماس T بر

این خم یا مسیر تعریف شده است. زاویه T با جهت مثبت محور X را θ می‌نامیم.

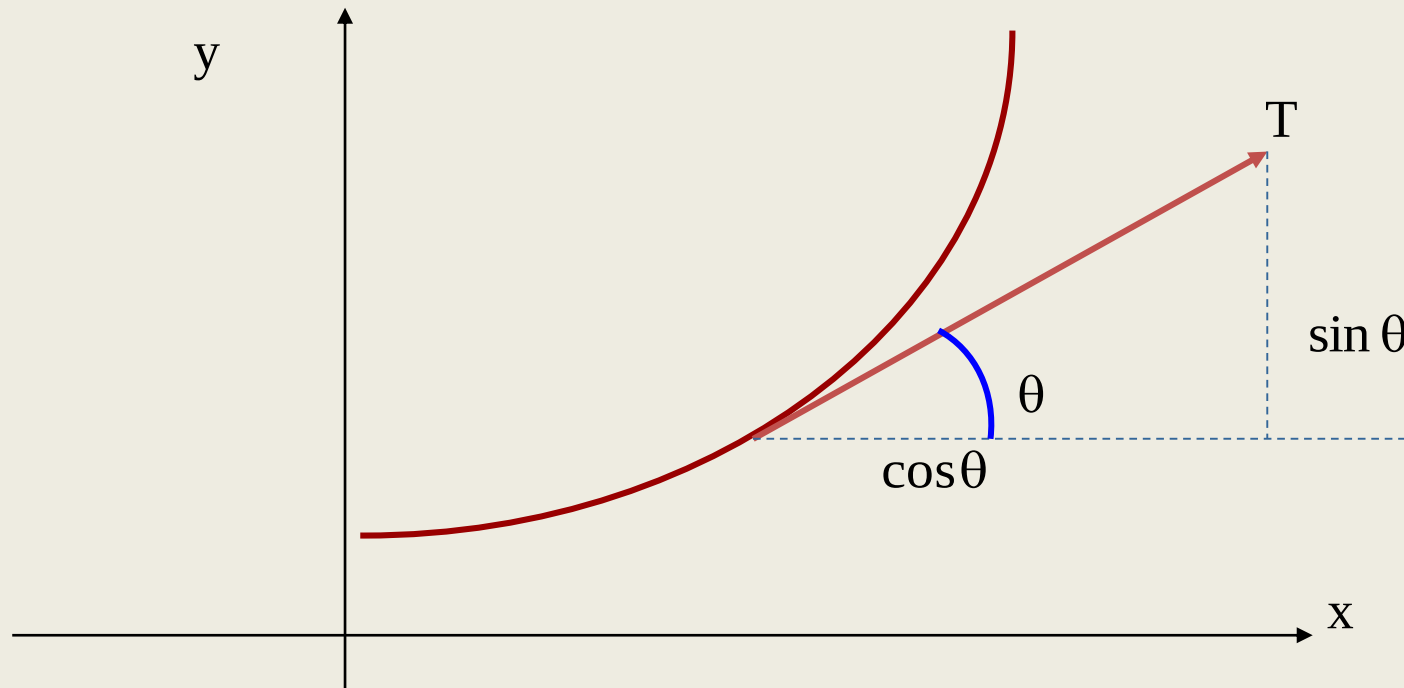
✳ چون T برداری یکه است، پس جهت آن تابعی از اندازه زاویه θ است.

با توجه به شکل اسلاید بعدی می‌نویسیم

$$T = T(\theta) = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$$

داریم

$$\frac{dT}{d\theta} = (-\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$$

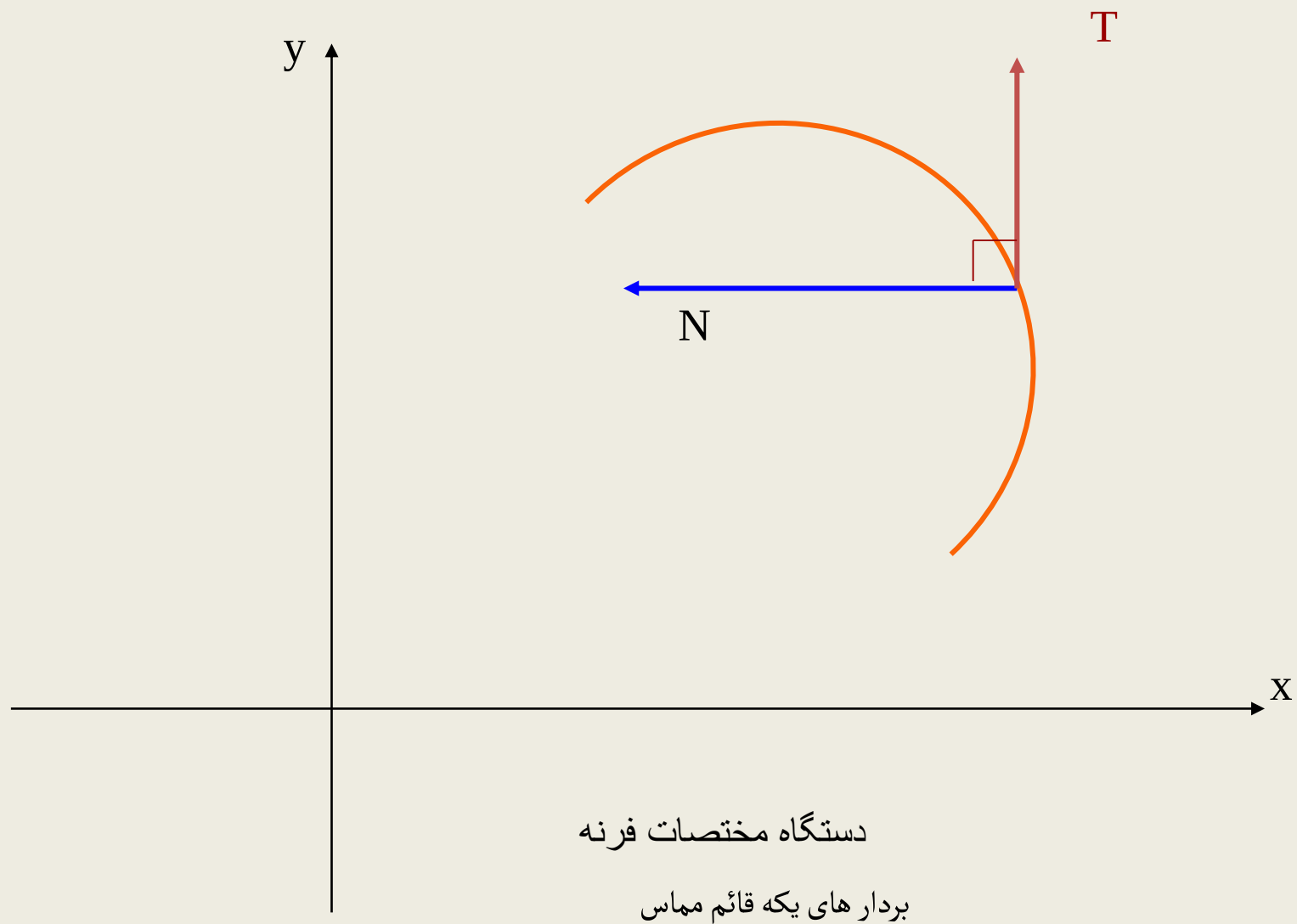


بنابراین $\frac{dT}{d\theta}$ برداری یک‌ه و عمود بر T است و با جهت مثبت محور x زاویه ای به

اندازه $\theta + \frac{\pi}{2}$ سازد. بنابراین دو برداری که قائم بر T با جهت های

مخالف هم هستند. یکی از این دو بردار را که جهت آن به طرف تعقر خم است

بردار یک‌ه قائم می نامیم و با N نشان می دهیم.



۸.۵.۲ مولفه های مماسی و قائم سرعت وشتاب

فرض کنید مسیر متحرک ، خم هموار و دو بار مشتقپذیر

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = x(t)i + y(t)j$$

باشد. سرعت این متحرک در لحظه t مساوی است با

$$V(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right) T \quad *$$

بنابراین در دستگاه مختصات TN داریم

$$V(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right) T + 0N$$

یعنی مولفه های $v(t)$ در دستگاه TN عبارت است از $\frac{ds}{dt}$ و 0 این عددها را به

ترتیب **مولفه های مماسی و قائم سرعت** می نامیم.

حال از رابطه * نسبت به t مشتق می گیریم تا شتاب متحرک را به دست آوریم.

داریم

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} T \right) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \left(\frac{dT}{dt} \right)$$

حال $\left(\frac{dT}{dt} \right) T$ را با استفاده از پارامتر محاسبه می کنیم. داریم

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad **$$

با قرار دادن $\frac{dT}{dt}$ از این رابطه در رابطه فوق به دست می آوریم

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} \left(\frac{dT}{d\theta} \right) \quad ***$$

می دانیم که $\frac{dT}{d\theta}$ نامزد خوبی برای بردار یکه قائم است فقط جهت آن است

که اجازه نمی دهد در این رابطه به جای آن N قرار دهیم. برای تشخیص جهت

به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{dT}{d\theta}$$

الف) اگر $\frac{d\theta}{dt} > 0$ آنگاه نسبت به θ صعودی است و بنابراین با افزایش t ،

T در جهت مثلثاتی تاییده می شود و لذا زاویه بین T و $\frac{dT}{d\theta}$ است که برابر $\frac{\pi}{2}$

در جهت مثلثاتی تغییر می کند. این بدان معناست که

$$\frac{dT}{d\theta} = N$$

ب) اگر $\frac{d\theta}{dt} < 0$ آنگاه نسبت به θ نزولی است و لذا بر حسب افزایش t ،

T در جهت عقربه های ساعت تاییده می شود. و در این حالت داریم

$$\frac{dT}{d\theta} = -N$$

در نتیجه فرمول** را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right) \left(\pm \frac{d\theta}{ds} \right) N = \frac{ds}{dt} \left| \frac{d\theta}{ds} \right| N$$

با استفاده از این فرمول ، رابطه *** به صورت زیر در می آید.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \mathbf{N}$$

عدهای $\frac{d^2s}{dt^2}$ و $\left| \frac{d\theta}{ds} \right| \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$ به ترتیب مؤلفه های مماسی و قائم شتاب

می نامیم. و آنها را به ترتیب با $\mathbf{a}_T$ و $\mathbf{a}_N$ نشان می دهیم. بنابراین داریم

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_T \mathbf{T} + \mathbf{a}_N \mathbf{N}$$

از این رابطه نتیجه می شود که

$$|\mathbf{a}(t)|^2 = a_T^2 + a_N^2$$

بنابراین برای پیدا کردن a_N (مماسی) a_T را از $|\mathbf{a}(t)|^2 - a_T^2$ محاسبه کنیم.

۸.۵.۲ مثال

(الف) بردار یکه قائم ، مولفه های مماسی و قائم شتاب متحرکی با معادله مسیر

حرکت زیر را پیدا کنید.

$$\mathbf{f}(t) = 3(\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + 3(\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$$

حل:

در لحظه t داریم

$$\mathbf{v}(t) = (3t \cos t)\mathbf{i} + (3t \sin t)\mathbf{j}$$

بنابراین

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)| = 3t$$

ولذا بردار یکه مماس در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}(t)}{\frac{ds}{dt}} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

این فرمول نشان می دهد که زاویه T با جهت مثبت محور X برابر است با t ، یعنی

$\theta = t$ بنابراین $\frac{d\theta}{dt} = 1 > 0$ نتیجه بردار یکه قائم بر مسیر عبارت است از

$$N = \frac{dT}{d\theta} = \frac{dT}{dt} = (-\sin t)i + (\cos t)j$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt} = 3t \quad \text{چون } t = \theta$$

و بنابراین مولفه های مماسی و قائم شتاب عبارت اند از

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = 3$$

$$a_N = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \frac{(3t)^2}{3t} = 3t$$

در نتیجه شتاب متحرک به صورت زیر به دست می آید.

$$a(t) = 3T + 3tN$$

۲.۵.۹ تعریف

عدد $\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|$ را K ، سرعت خمیده شدن مسیر متحرک نسبت به پارامتر طول

خم است، **انحنای مسیر** یا **خم** می‌نامیم و آن را با حرف یونانی κ (بخوانید

$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|$$

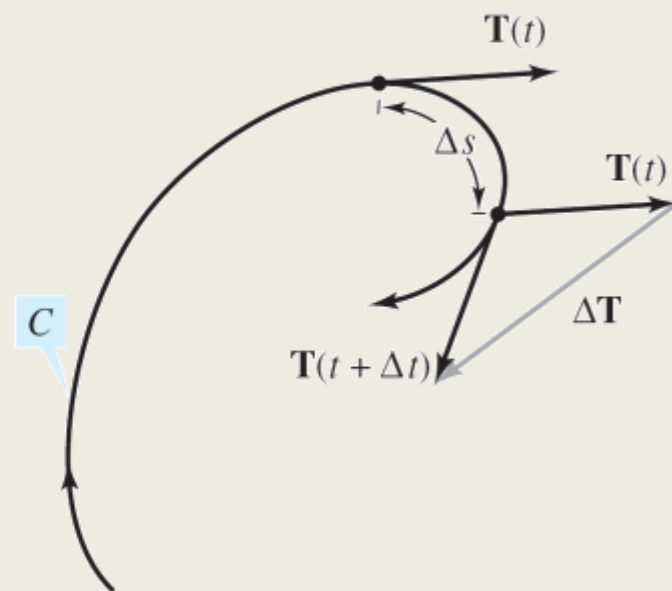
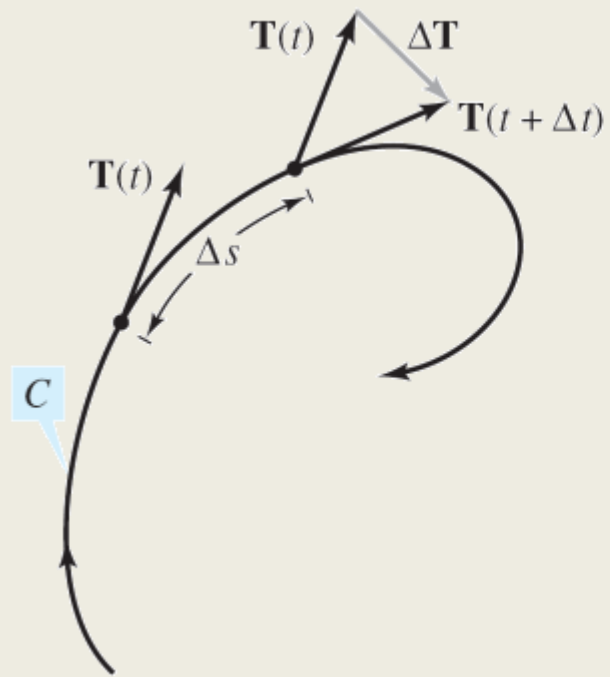
کاپا) نشان می‌دهیم.

$$\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$

✳ می‌توان ثابت کرد که انحنای ذاتی κ مسیر است و به انتخاب دستگاه

κ مختصات بستگی ندارد. با وجود این پیدا کردن فرمولی برای محاسبه بر

حسب مختصات مورد استفاده بسیار مناسب است.



مثال. انحناى دایره زیر را پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(\theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}.$$

$$s = r\theta,$$

$$\mathbf{r}(s) = r \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} + r \sin \frac{s}{r} \mathbf{j}$$

بنابراین داریم

$$\mathbf{r}'(s) = -\sin \frac{s}{r} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{r} \mathbf{j},$$

در نتیجه $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$ و داریم

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|} = -\sin \frac{s}{r} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{r} \mathbf{j}$$

و در نهایت مقدار انحنا را خواهیم داشت

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \left\| -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} - \frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \mathbf{j} \right\| = \frac{1}{r}$$

✱ با توجه به تعریف مشاهده می کنیم که هر چه $\left| \frac{d\theta}{ds} \right|$ بیشتر (کمتر) باشد $\left| \frac{dT}{ds} \right|$ بیشتر (کمتر) باشد.

خمیدگی خم بیشتر (کمتر) است و لذا انتظار می رود که خمیدگی یک دایره کوچک عددی بسیار بزرگ و بر عکس خمیدگی خط راست صفر باشد.

۱۰.۵.۲ مثال

الف) انحنای خط راست زیر را پیدا کنید.

$$y = ax + b$$

حل:

با قرار دادن $x = t$ این خط را می توان به عنوان نگاره خم زیر در نظر گرفت.

$$f(t) = t i + (a t + b) j$$

داریم

$$a(t) = 0$$

و از این رو

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = a_N = 0$$

چون

$$\frac{ds}{dt} = |v(t)| = \sqrt{1 + a^2} \neq 0$$

پس

$$\left|\frac{d\theta}{ds}\right| = 0$$

✳ بنابراین انحنای خط راست صفر است. چیزی که انتظارش را داشتیم.

۱۱.۵.۲ محاسبه انحنا بر حسب مختصات

✱ با توجه به فرمول تجزیه بردار شتاب در دستگاه فرنه و تعریف انحنا قضیه زیر را

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}$$

داریم.

قضیه:

انحنا خم C داده شده توسط تابع برداری $r(t)$ برابر است با

$$k(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

برهان. چون $T = \frac{r'}{|r|}$ و $|r'| = \frac{dS}{dt}$ ، داریم

$$r' = |r'| T = \frac{dS}{dt} T$$

در نتیجه

$$r'' = \frac{d^2 S}{dt^2} T + \frac{dS}{dt} T'$$

از آنجا که $T \times T = 0$ می توانیم بنویسیم

$$r' \times r'' = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (T \times T')$$

چون $|T| = 1$ پس $T \perp T'$. بنابراین

$$|r' \times r''| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |T \times T'| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |T| |T'|$$

$$|T'| = \frac{|r' \times r''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^2}$$

در نهایت داریم

$$k = \frac{|T'|}{|r'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

۱۲.۵.۲ مثال

(الف) مسیر متحرک خمی با معادلات پارامتری زیر است

$$x(t) = 3\cos t, \quad y(t) = 4\sin t$$

انحنای این مسیر را در لحظه t و سپس در لحظه های $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ پیدا کنید.

حل:

داریم

$$x' = -3\sin t, \quad x'' = -3\cos t, \quad y' = 4\cos t, \quad y'' = -4\sin t$$

بنابراین

$$\kappa = \frac{|12\sin^2 t + 12\cos^2 t|}{(9\sin^2 t + 16\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{12}{(9\sin^2 t + 16\cos^2 t)^{3/2}}$$

به ازای $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ داریم

$$\kappa(0) = \frac{12}{36} = \frac{3}{16} \quad , \quad \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

ب) انحنای خم x^2 را پیدا کنید

حل:

از فرمول **** داریم

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

مثلاً در نقطه $(0, 0)$ انحنای این خم عبارت است از

$$\kappa(0) = \frac{1}{2}$$

✱ حال آخرین مفهوم این قسمت ، یعنی دایره انحنا را معرفی می کنیم .

۱۳ . ۵ . ۲ تعریف

خم هموار و دو بار مشتقپذیر زیر و نقطه P واقع بر آن را در نظر می گیریم.

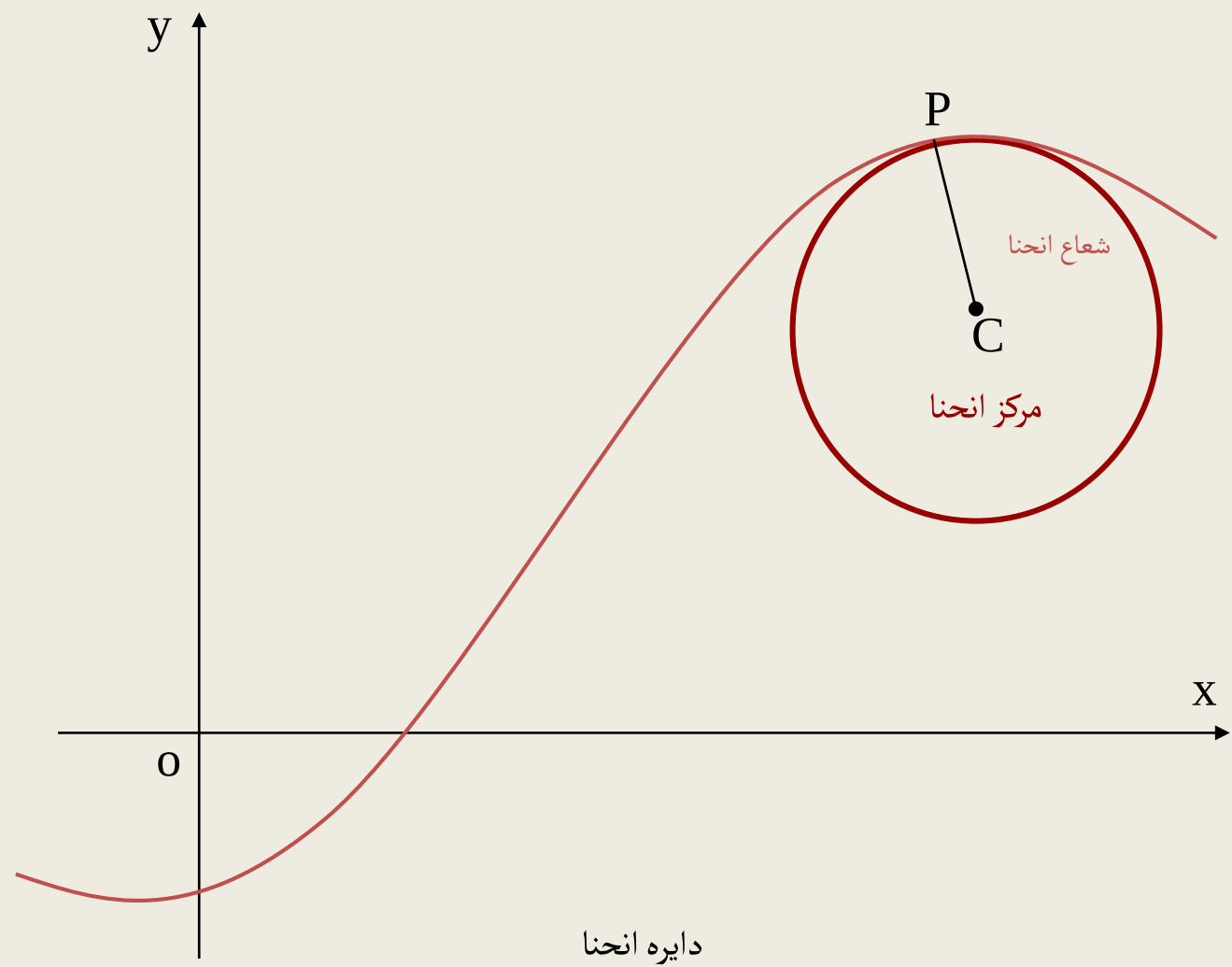
بر این خم در نقطه P دایره ای مماس می کنیم که

(الف) انحنای دایره مساوی باشد با انحنای خم

(ب) مرکز دایره در طرف تقعر خم و روی خط قائم بر خم در P باشد . این

دایره را **دایره انحنا (بوسان)** ، مرکز و شعاع آن را به ترتیب **مرکز و شعاع انحنای خم** در

نقطه P می نامیم .



۱۴.۵.۲ مثال

معادله دایره انحنای خم e^x در نقطه $(0,1)$ پیدا می کنیم .

حل:

نخست شعاع انحنای مسیر را پیدا می کنیم. برای این منظور انحنای مسیر را

به دست می آوریم. داریم

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$$

بنابراین در نقطه $(0,1)$ انحنای مساوی است با

$$\kappa = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3$$

در نتیجه شعاع انحنای برابر است با $a = \frac{1}{\kappa} = (\sqrt{2})^3$

اکنون روی خط عمود بر خم در نقطه $(0, 1)$ مرکز دایره انحنا را پیدا می‌کنیم.

معادله این خط عبارت است از

$$y = 1 - x$$

بنابراین اگر $A(a, b)$ مرکز انحنا باشد ، باید داشته باشیم

$$b = 1 - a , \quad a^2 + (b - 1)^2 = 2^3$$

با حل این دستگاه نسبت به a و b بدست می‌آوریم $b = 3$ و $b = -1$ ، بنابراین

نقاط ممکن برای مرکز دایره انحنا عبارت اند از $A(-2, 3)$ و $A(2, -1)$ در طرف

مقعر خم واقع است در نتیجه معادله دایره انحنا عبارت اند از

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^3$$

۲.۶ حرکت در فضا

۱. ۲.۶.۱ تعریف مفاهیم اولیه

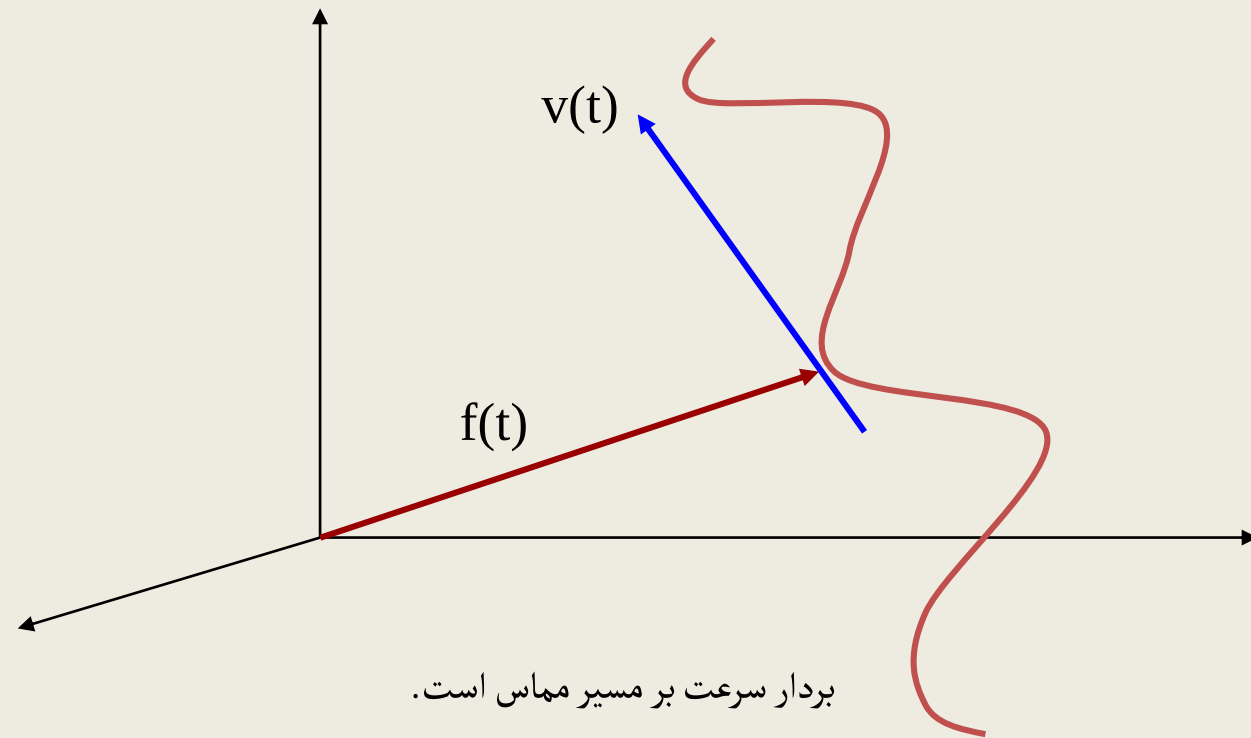
فرض کنید خم مشتقپذیر

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

مسیر یک متحرک باشد. بردار

$$f'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

را سرعت متحرک در لحظه t می نامیم و آن را با $v(t)$ نشان می دهیم.



چون به ازای هر $t \in [a, b]$ $v(t) = f'(t) \neq 0$

$$T = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{1}{|v(t)|} v(t)$$

بدون ابهام تعریف می شود.

این بردار را **برداریکه مماس** بر خم (یا مسیر متحرک) در نقطه t می نامیم.

فرض می کنیم

$$s(t) = \int_a^t |f'(\eta)| d\eta$$

*

طول خم از نقطه $f(a)$ تا نقطه $f(t)$ باشد. در این صورت $s(t)$ تابعی صعودی و

مشتقپذیر از $s(t)$ است و داریم

$$\left(\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|v(t)|} \right) \frac{ds}{dt}(t) = |v(t)|$$

**

با استفاده از روابط * و ** داریم

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|} = T$$

یعنی مشتق بردار موضع نسبت به طول خم مساوی است با بردار یکه مماس

✱ طول بردار سرعت ، یعنی $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ را مقدار بردار سرعت متحرک

می نامیم.

✱ اگر علاوه بر هموار بودن ، تابع f دو بار مشتقپذیر باشد ، آنگاه بردار

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$

راشتاب متحرک در لحظه t می نامیم.

۲.۶.۲ مثال

در مثال ۵.۱.۳۵ (پ) طول پیچوار

$$f(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j + (bt)k \quad t \in \mathbb{R}$$

را که بین نقطه های $f(0)$ و $f(t)$ و $(t > 0)$ واقع است به صورت

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, d\eta = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

محاسبه کردیم. چون

$$v(t) = (-a \sin t)i + (a \cos t)j + bk$$

پس بردار یکه مماس مساوی است با

$$T = \frac{v(t)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t i + a \cos t j + bk)$$

همچنین داریم

$$a(t) = -a(\cos t i + \sin t j)$$

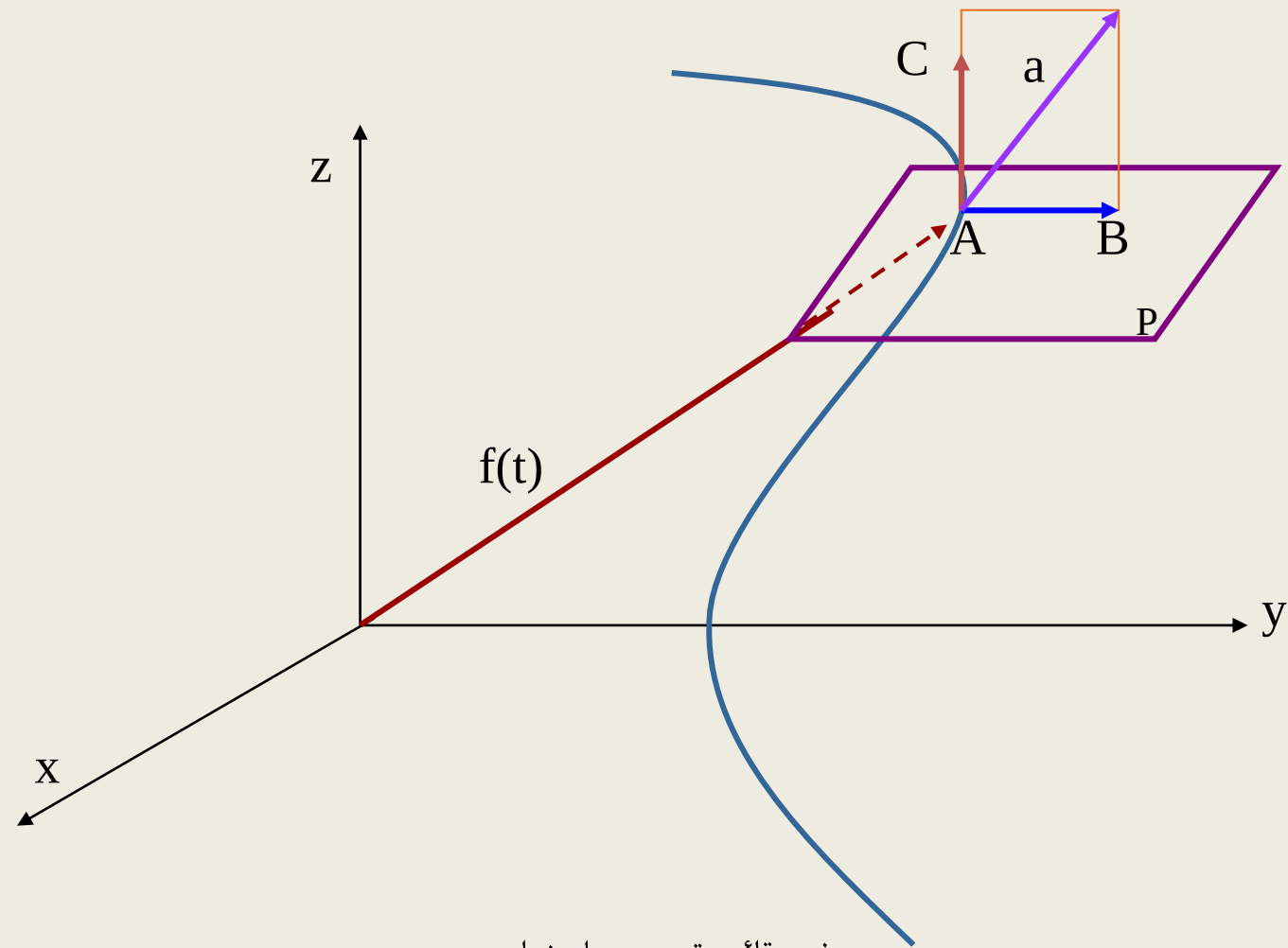
۳. ۶. ۲ صفحه قائم و مولفه های شتاب

می خواهیم بردار شتاب $a(t)$ را که از نقطه $f(t)$ رسم می شود به مجموع دو بردار

تجزیه کنیم ، یکی در امتداد بردار یکه مماس T و دیگری برداری واقع در صفحه

عمود بر T در نقطه $f(t)$. این صفحه را صفحه قائم بر خم (یا مسیر) در لحظه t

می نامیم.



صفحه قائم و تجزیه بردار شتاب

مشاهده می کنیم که بردار شتاب به مجموع دو بردار تجزیه شد $\vec{A}\vec{B}$, $\vec{A}\vec{C}$ است.

$$\vec{a}(t) = \vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{C}$$

می خواهیم این بردار ها را بر حسب تابع f شناسایی کنیم. با استفاده از قاعده زنجیری می نویسیم

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{df}{ds} \times \frac{ds}{dt} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2f}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \cancel{\frac{df}{ds}}^T \times \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2} T + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left(\frac{d^2f}{ds^2} \right)$$

اکنون از دو طرف رابطه زیر نسبت به S مشتق می گیریم.

$$T.T = \left(\frac{df}{ds} \cdot \frac{df}{ds} \right) = 1$$

در نتیجه

$$\frac{d^2f}{ds^2} \cdot \frac{df}{ds} = \frac{d^2f}{ds^2} \cdot T = 0$$

بنابراین بردار $\frac{d^2f}{ds^2}$ بر بردار مماس T عمود است. بنابراین اگر از نقطه A

رسم شود روی صفحه قائم خواهد بود. بردار یکه N را به صورت

$$N = \frac{\frac{d^2f}{ds^2}}{\left| \frac{d^2f}{ds^2} \right|}$$

*

تعریف می کنیم و آن را **بردار قائم اصلی** بر خم در نقطه $A = f(t)$ می نامیم.

با استفاده از * بر دار $a(t)$ را به صورت زیرمی نویسیم.

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} T + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left| \frac{d^2f}{ds^2} \right| N$$

بنابراین بردار $a(t)$ به مجموع دو بردار تجزیه می شود.

۴. ۶. ۲ تعریف

الف) عدد های $\frac{d^2s}{dt^2}$ ، $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left| \frac{d^2f}{ds^2} \right|$ ترتیب مولفه های مماسی و قائم

شتاب در لحظه t می نامیم و آنها را به صورت زیر نشان می دهیم

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \quad a_N = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left| \frac{d^2f}{ds^2} \right|$$

ب) بردار $\frac{dT}{ds}$ و اندازه آن عدد

$$\kappa = \left| \frac{d^2f}{ds^2} \right| = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

را به ترتیب بردار انحنا و انحنای مسیر در لحظه t می نامیم.

۵. ۶. ۲ مثال

(الف) بردار قائم اصلی ، معادله صفحه قائم و انحنای خم

$$f(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j + (bt)k \quad t \in \mathbb{R}$$

رادر نقطه $A(-a, 0, b\pi)$ به ازای به دست می آید، پیدا می کنیم.

حل:

بنا بر مثال ۵.۳.۲ بردار یکه مماس در لحظه t عبارت است از

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t i + a \cos t j + b k)$$

و لذا در نقطه A داریم

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-aj + bk)$$

همچنین در لحظه t داریم

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} ((-a \cos t)i + (-a \sin t)j)$$

بنابراین با توجه به رابطه

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در نقطه A یعنی در لحظه $t = \pi$ داریم

$$\frac{dT}{ds} = \frac{ai}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین انحنای مسیر در نقطه داده شده ، مساوی است با

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

و از این رو بردار قائم اصلی عبارت است از

$$N = \frac{dt}{ds} = i$$

چون صفحه قائم از A می‌گذرد و بر T عمود است پس معادله آن عبارت است از

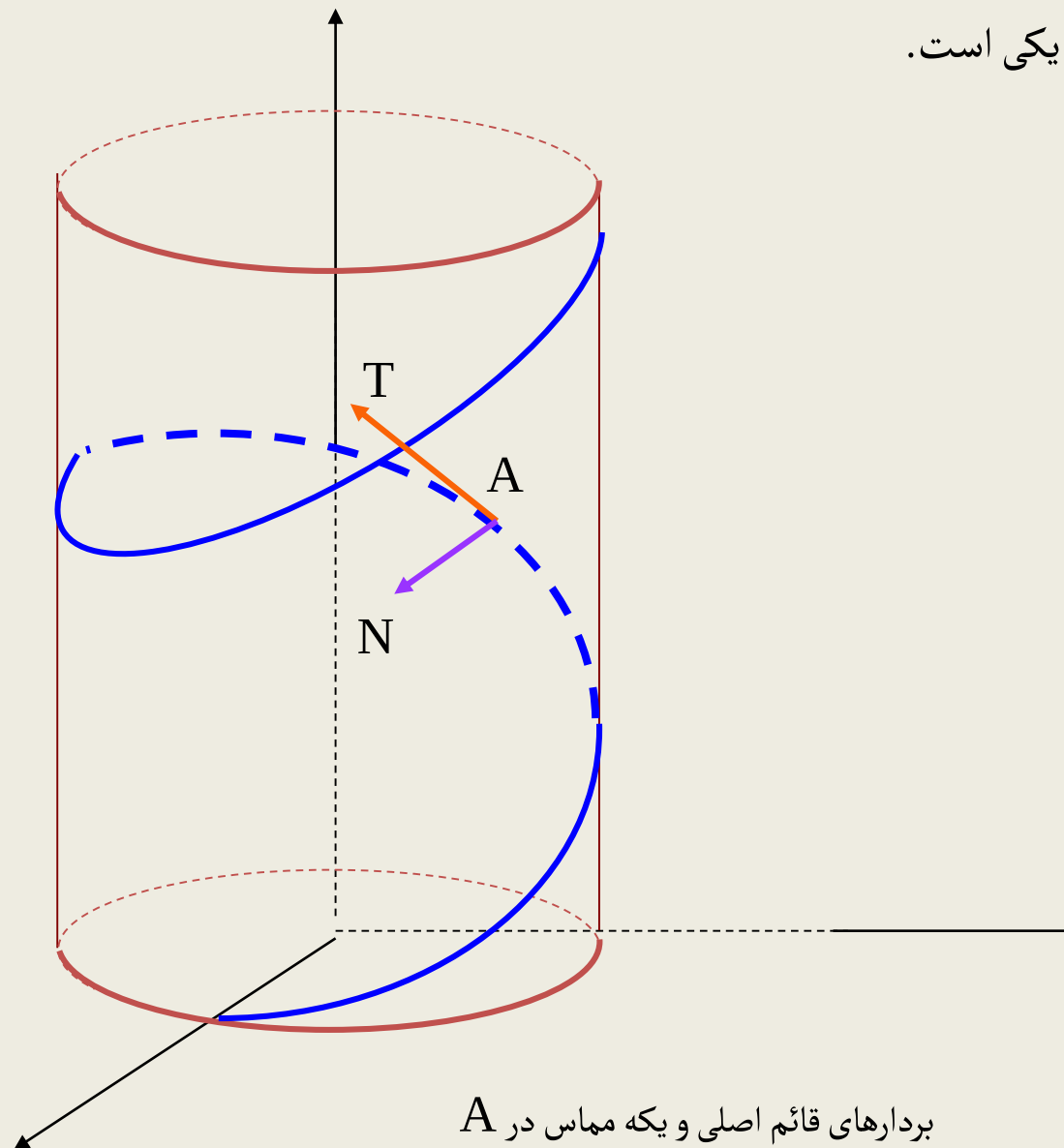
$$(x + a, y, z - b\pi) \cdot T = 0$$

یا

$$ay - b(z - b\pi) = 0$$

در شکل زیر مبدا N را در A قرار داده و آن را رسم کرده ایم. توجه کنید که

جهت N و محور x یکی است.



۶.۶.۲ قائم مضاعف و تاب

دیدیم که اگر خم هموار

$$f(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad t \in [a, b]$$

دو بار مشتقپذیر باشد، آنگاه به ازای هر t ، صفحه قائم بر خم و مولفه های مماسی

و قائم شتاب بدون هیچ ابهامی تعریف می شوند. می دانیم که بردار قائم اصلی N در

صفحه قائم قرار دارد و بردار یکه مماس T براین صفحه عمود است. اکنون در صفحه

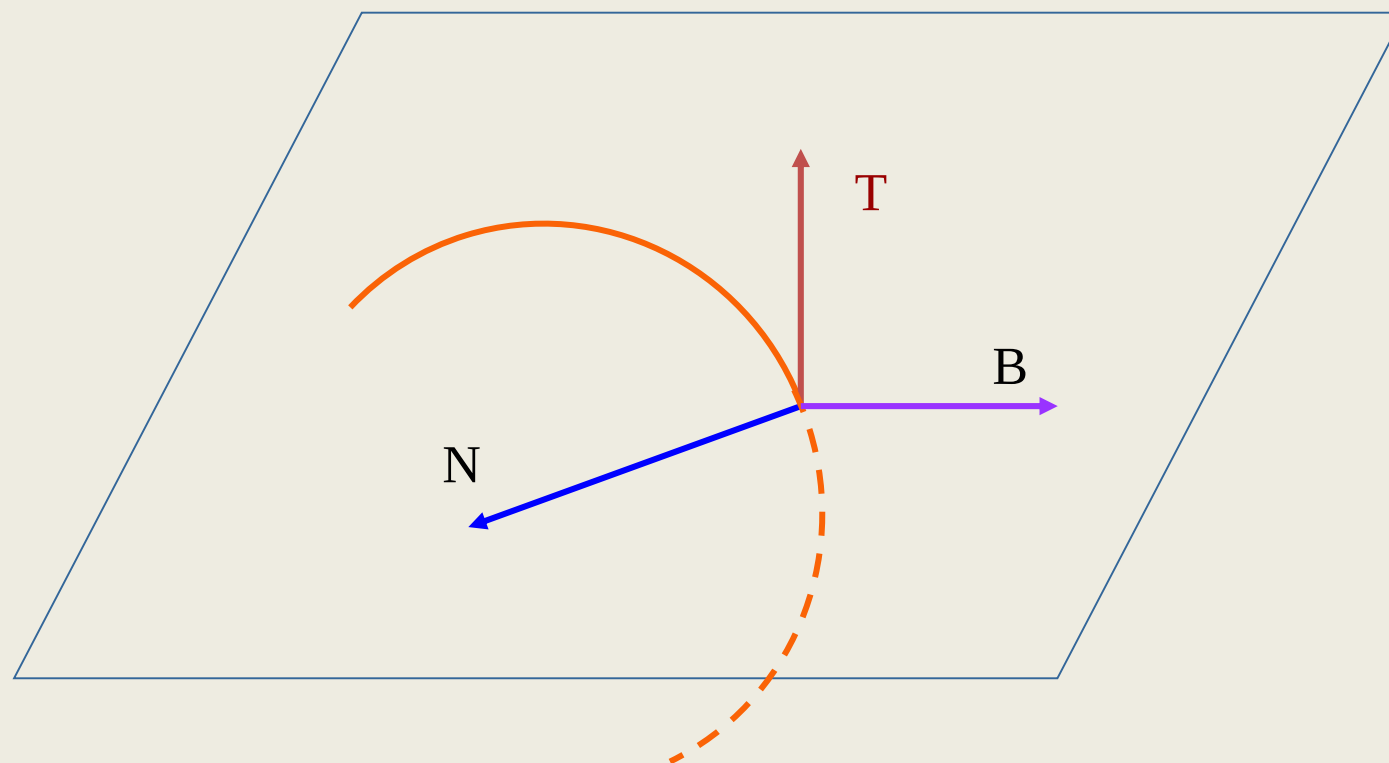
قائم بردار یکه B را چنان در نظر می گیریم که دستگاه TNB یک دستگاه راستگرد

باشد.

بردار B را قائم مضاعف بر خم، صفحه تشکیل شده توسط بردارهای N و T را صفحه

بوسان و صفحه تشکیل شده توسط بردارهای B و T را صفحه **رکتیفایر** (یکسوساز)

در لحظه t و صفحه گذرنده از نقطه $f(t)$ با بردار قائم T را صفحه **عمود** می نامیم.



TNB یک دستگاه راستگرد است.

✱ $T \frac{dB}{ds}$ نیز عمود است .

در نتیجه $\frac{dB}{ds}$ متریکی از بردار N است. یعنی عددی چون وجود دارد که τ

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

τ را **تاب خم** در نقطه مورد محاسبه می نامیم.

فرمول * نشان می دهد که

$$|\tau| = \left| \frac{dB}{ds} \right|$$

✱ و از این رو ، تاب آهنگ چرخش بردار B است.

✱ توجه کنید که انحنای هرگز τ منفی نیست ولی تاب می تواند مثبت ،

صفر یا منفی باشد.

۷. ۶. ۲ مثال

الف) معادله صفحه بوسان و تاب خم

$$f(t) = (\sqrt{3} \cos t)\mathbf{i} + (\sqrt{3} \sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

را پیدا کنید.

حل:

این خم محل تلاقی صفحه $z = 1$ و استوانه $x^2 + y^2 = 3$ است.

خمی مسطح است. پس صفحه بوسان آن عبارت است از $z = 1$. چون خم

مسطح است پس تاب ندارد یعنی $\tau = 0$.

۸. ۶. ۲ محاسبه انحنا

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = \frac{|f'(t)f''(t)|}{|f'(t)|^3}$$

۹. ۶. ۲ مثال

مسیر متحرکی عبارت است از

$$\mathbf{f}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

می خواهیم انحنای مسیر را پیدا کنیم و معادله صفحه قائم بر مسیر را در نقطه ای

که انحنا بیشینه است به دست آوریم.

حل:

داریم $f'(t) = i + j + 2tk$, $f''(t) = 2k$

بنابراین

$$f'(t) \times f''(t) = -2j + 2i \quad , \quad |f'(t)f''(t)| = 2\sqrt{2}$$
$$|f'(t)| = \sqrt{2 + 4t^2}$$

از این رو

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3 (1+2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

بیشینه انحنا وقتی به دست می آید که $t = 0$ به ازای این مقدار چون $\kappa = 1$

صفحه قائم از نقطه $(0, 0, 0)$ می گذرد و بر بردار یکه مماسی

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i + j)$$

عمود است ، پس معادله آن به صورت زیر است

$$x + y = 0$$

۱۰.۶.۲ محاسبه تاب

بنا به تعریف عدد τ را که در فرمول

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

صدق می کند **تاب خم** یا **مسیر متحرک** می نامیم.

$$\tau = \frac{(f'(t) \times f''(t) \cdot f'''(t))}{|f'(t) \times f''(t)|^2}$$

با استفاده از این فرمول یکی از مهمترین خصوصیات خمها مسطح به دست می آید.

✱ می دانیم که اگر $\tau = 0$ آنگاه **خم مسطح** است. به عبارت دیگر اگر

$$(f'(t) \times f''(t) \cdot f'''(t)) = 0 \quad **$$

آنگاه خم داده شده $f(t)$ مسطح است.

$$(f'(t), f''(t), f'''(t))$$

برعکس اگر خم $f(t)$ مسطح باشد ، روشن است که بردارهای

نمی توانند کنجی نابدیهی بسازند و از این رو ، ^{**} مجدداً برقرار است.

✱ بنابراین خم $f(t)$ در یک صفحه قرار دارد اگر و تنها اگر تاب آن صفر باشد. به

عبارت دیگر خم مسطح است اگر و تنها اگر رابطه ^{**} برقرار باشد.

۱۱ . ۶ . ۲ مثال

الف) خم

$$f(t) = \sqrt{t^2 + 1} \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + 2t \mathbf{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

مسطح است (در یک صفحه قرار دارد) بنابراین تاب آن در هر نقطه صفر است.

ب) تاب خم

$$f(t) = (e^{-t} \cos t)i + (e^{-t} \sin t)j + e^{-t}k \quad t \in \mathbb{R}$$

را در نقطه دلخواه $f(t)$ محاسبه می کنیم و نشان می دهیم که این خم مسطح نیست.

حل:

داریم

$$f'(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)i + e^{-t}(\cos t - \sin t)j - e^{-t}k$$

$$f''(t) = (2e^{-t} \sin t)i - 2(e^{-t} \cos t)j + e^{-t}k$$

$$f'''(t) = 2e^{-t}(\cos t - \sin t)i + 2e^{-t}(\cos t + \sin t)j - e^{-t}k$$

بنابراین داریم

$$f'(t) \times f''(t) = -e^{-2t}(\cos t + \sin t)i + e^{-2t}(\cos t - \sin t)j + 2e^{-2t}k$$

$$|f'(t) \times f''(t)| = e^{-2t} \sqrt{6}$$

$$(f'(t) \times f''(t).f'''(t)) = -2e^{-3t}$$

در نتیجه داریم

$$\tau = \frac{((f' \times f'').f''')}{|f' \times f''|^2} = \frac{-2e^{-3t}}{6e^{-4t}} = \frac{1}{3} e^t$$

چون $0 \neq \tau$ خم داده شده مسطح نیست.